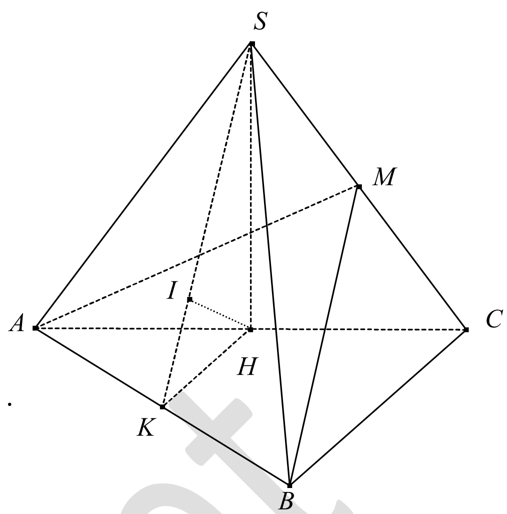


Ta có : $\begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp HK \\ HK \cap SH = \{K\} \\ HK, SH \subset (SHK) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK)$.

Mà $HI \subset (SHK)$ nên $AB \perp HI$.

Lại có : $\begin{cases} HI \perp SK \\ HI \perp AB \\ SK \cap AB = \{K\} \\ SK, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HI$.

Góc giữa đường thẳng SB và $mp(ABC)$ bằng góc nhọn $\widehat{SBH} = 60^0$.

Ta có $HB = \frac{1}{2}AC = a$; $HK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Xét $\Delta SHB: SH = \tan 60^0.HB = a\sqrt{3}$.

Xét ΔSHK vuông tại H suy ra $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $d(M,(SAB)) = HI = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

Ta có : $d(M,(SAB)) = \frac{3V_{MSAB}}{S_{\Delta SAB}}$.

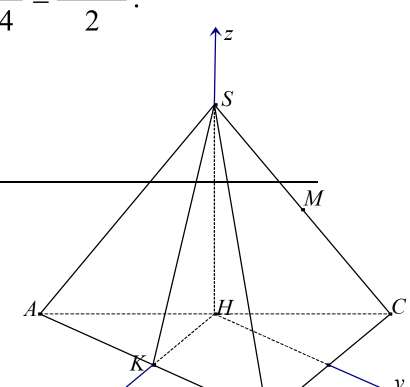
Tam giác ABC vuông tại B $\Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Mặt khác : $\frac{V_{SAMB}}{V_{SABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SAMB} = \frac{1}{2}V_{SABC}$.

Lại có : $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a = \frac{a^3}{2} \Rightarrow V_{SAMB} = \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{a^3}{4}$.

Tam giác SHK vuông tại H nên $SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}SK.AB = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{39}}{4}$.



Vậy : $d\left(M,(SAB)\right)=\dfrac{3V_{MSAB}}{S_{\Delta SAB}}=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz như hình vẽ.

Khi đó $H\equiv O(0;0;0)$, $K\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$

$A\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $M\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{KS}=\left(-\dfrac{a}{2};0;a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{KA}=\left(-a;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{KM}=\left(-\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$.

Vậy $d\left(M,(SAB)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{KS},\overrightarrow{KA}\right].\overrightarrow{KM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{KS},\overrightarrow{KA}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC}=60^0$, $SA=SB=SC=2a$. Tính khoảng cách giữa AB và SC

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$. B. $\dfrac{a\sqrt{11}}{12}$. C. $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{8}$. D. $\dfrac{3a\sqrt{11}}{4}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

ΔABC có $AB=BC,\ \widehat{ABC}=60^0$ nên ΔABC đều

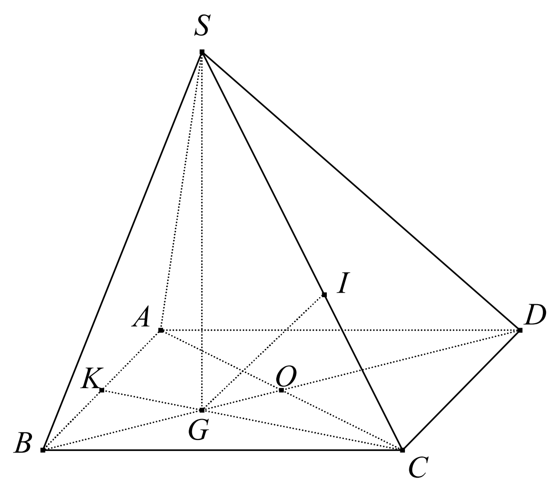
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, K là trung điểm của AB.

Ta có : $SA=SB=SC$ nên $SG\perp(ABCD)$.

Mặt khác: $AB//(SCD)\Rightarrow d(AB,SC)=d\left(AB,(SCD)\right)=d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(G,(SCD)\right)$.

Vì G là trọng tâm ΔABC đều nên $CG\perp AB$ hay $CG\perp CD$.

Kẻ $GI\perp SC$



Ta có: $\begin{cases}CD\perp SG\\CD\perp CG\\SG\cap CG=\{G\}\\SG,CG\subset(SCG)\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SGC)$.

mà $GI\subset(SGC)$ nên $CD\perp GI$.

Lại có $\begin{cases}GI\perp SC\\GI\perp DC\\SC\cap CD=\{C\}\\SC,CD\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow GI\perp(SCD)$

hay $d\left(G,\left(SCD\right)\right)=GI$.

ΔABC đều có cạnh bằng a nên $CG=\dfrac{2}{3}CK=\dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SGC vuông tại G suy ra $SG=\sqrt{SC^2-GC^2}=\sqrt{4a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$.

$\dfrac{1}{GI^2}=\dfrac{1}{SG^2}+\dfrac{1}{GC^2}\Rightarrow GI=\dfrac{a\sqrt{11}}{6}$.

Vậy $d\left(AB,SC\right)=\dfrac{3}{2}d\left(G,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{3}{2}\dfrac{a\sqrt{11}}{6}=\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

$AB//\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{3V_{BSCD}}{S_{\Delta SCD}}$.

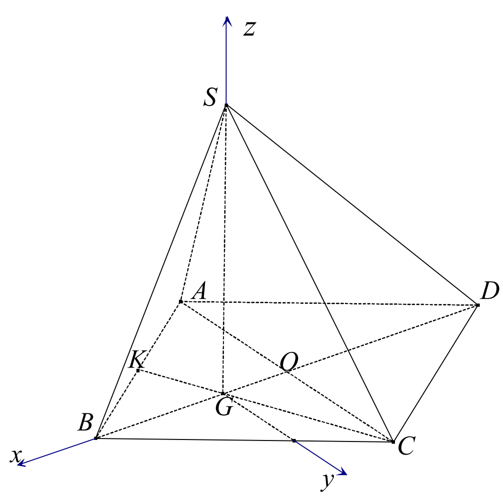
Tam giác SGC vuông tại G suy ra $SG=\sqrt{SC^2-GC^2}=\sqrt{4a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác ABC đều có cạnh bằng a nên: $OC=\dfrac{a}{2}$, $OB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác BCO vuông tại O : $S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}OC.BD=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{3}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó: $V_{SBCD}=\dfrac{1}{3}SG.S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Ta có: $\begin{cases} CD\perp SG \\ CD\perp CG \\ SG\cap CG=\{G\} \\ SG,CG\subset\left(SCG\right) \end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SGC\right)\Rightarrow CD\perp SC$.



Tam giác SCD vuông tại C : $S_{\Delta SCD}=\dfrac{1}{2}SC.CD=\dfrac{1}{2}.2a.a=a^2$.

Vậy $d\left(AB,SC\right)=\dfrac{3V_{BSCD}}{S_{\Delta SCD}}=\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.

[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ trong đó:

$G\left(0;0;0\right)$, $B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\right)$, $C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};0\right)$, $D\left(-\dfrac{2a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{CS}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\right)$, $\overrightarrow{CD}=\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-\dfrac{a}{2};0\right)$

$$\overrightarrow{CB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right)$$

Suy ra: $d\left(AB,SC\right)=d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CS}\right].\overrightarrow{CB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CS}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.

Câu 55. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$, I là trung điểm của BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AI và OB.

A. $\arctan\sqrt{5}$. B. $\arctan 5$. C. $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\arctan\dfrac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi M là trung điểm của OC. Ta có $IM//OB$

Nên góc giữa AI và OB là góc giữa AI và IM và bằng góc $\widehat{AIM}$

Ta có : $\begin{cases}OB\perp OC\\ OB\perp OA\end{cases}\Rightarrow OB\perp\left(OAC\right)$ mà $IM//OB$ nên $IM\perp\left(OAC\right)$.

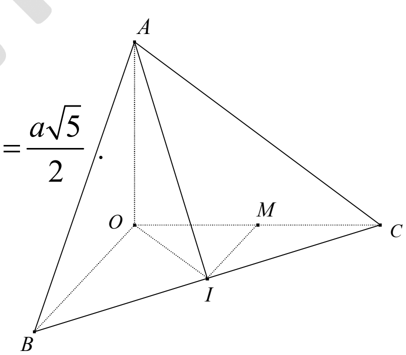
Lại có $AM\subset\left(OAC\right)$ nên $IM\perp AM$.

Xét tam giác AIM vuông tại M nên ta có:

$IM=\dfrac{1}{2}OB=a$; $AM^2=AO^2+OM^2=a^2+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{5a^2}{4}\Rightarrow AM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan\widehat{AIM}=\dfrac{AM}{IM}=\sqrt{5}\Rightarrow\widehat{AIM}=\arctan\sqrt{5}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AI và OB bằng $\arctan\sqrt{5}$.



[Cách 2]: Phương pháp dùng tích vô hướng

Ta có: $\cos\left(AI,OB\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)\right|$

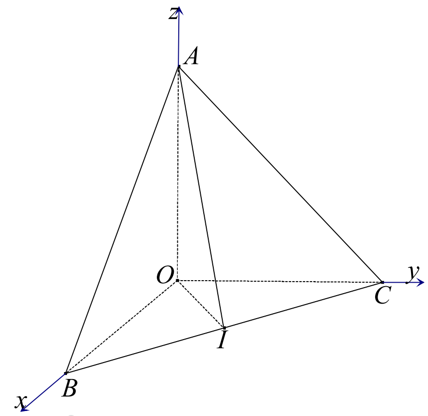
Ta xét: $\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{OB}}{AI.OB}$

Có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI}\right)\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OB}=OI.OB.\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

Do đó: $\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{OB}}{AI.OB}=\dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.a}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\cos\left(AI,OB\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\tan\left(AI,OB\right)=\sqrt{5}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AI và OB bằng $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\arctan\sqrt{5}$

[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.



Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{AI}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-a\right)$; $\overrightarrow{OB}=(a;0;0)$

$\cos(AI,OB)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{OB}\right|}{AI.OB}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\tan\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)=\sqrt{5}$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AI và OB bằng $\arctan\sqrt{5}$.

Câu 56. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, cạnh bên bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và CD. Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SAC).

A. $\arctan 2\sqrt{2}$. B. $\arctan 2$. C. $\arctan\sqrt{2}$. D. $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

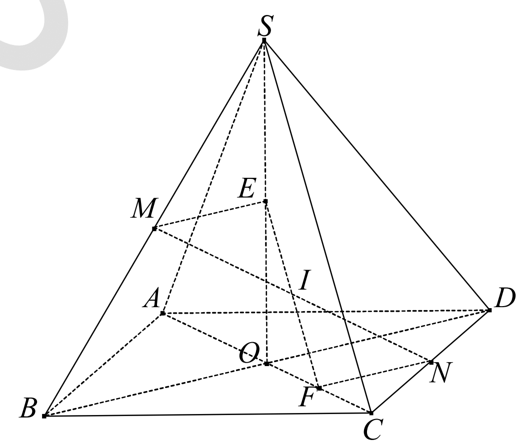
Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SO, OC

Vì hình chóp $SABCD$ đều, O là tâm của đáy $ABCD$ nên $SO\perp(ABCD)$.

Lại có $ABCD$ là hình vuông nên $BD\perp AC$.



Ta có $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SO\\SO\cap AC=\{O\}\\SO,AC\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$.

Ta có : $\begin{cases}ME//BD\\BD\perp(SAC)\end{cases}\Rightarrow ME\perp(SAC)$.

Lại có : $NF\perp(SAC)$

Do đó : Hình chiếu của MN lên mặt phẳng (SAC) là EF.

Nên góc giữa MN và mặt phẳng (SAC) là góc giữa MN và EF bằng góc $\widehat{NIF}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $BD=a\sqrt{2}$.

NF là đường trung bình của tam giác ODC $\Rightarrow NF=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

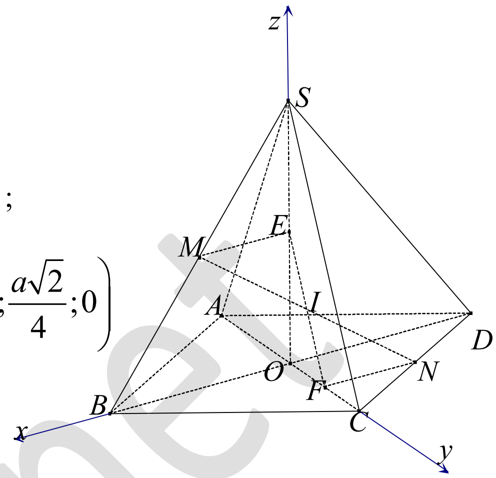
Mặt khác $EF=\frac{1}{2}SC=\frac{a}{2}$.

Tứ giác $MNEF$ là hình bình hành nên hai đường chéo MN, EF cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường

$\Rightarrow FI=\frac{1}{2}EF=\frac{a}{4}$.

Tam giác NFI vuông tại F nên $\tan\widehat{NIF}=\dfrac{FN}{FI}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{4}}=2\sqrt{2}\Rightarrow\widehat{NIF}=\arctan 2\sqrt{2}$.

Vậy góc giữa MN và mặt phẳng (SAC) bằng $\arctan 2\sqrt{2}$.



[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:

Ta có $O(0;0;0)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $B\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$;

$C\left(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0;\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)$

Véctơ pháp tuyến của (SAC) là: $\vec{n}=\vec{i}=(1;0;0)$

$\sin\left(MN,(SAC)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{MN},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{MN.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\tan\left(MN;(SAC)\right)=2\sqrt{2}$.

Câu 57. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên bằng $2a$ và $A'A=A'B=A'C$. Tính giá trị $\tan\alpha$ với α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC).

A. $2\sqrt{11}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $2a\sqrt{11}$. D. $2a\sqrt{5}$.

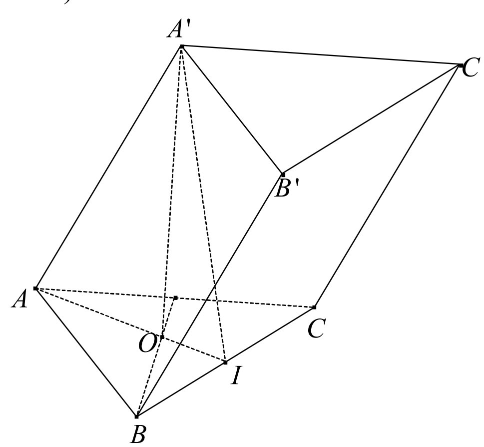
Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi O là tâm của đáy ABC. Suy ra $A'O\perp(ABC)$

Gọi I là trung điểm BC. Ta có $AI\perp BC$ (tam giác ABC đều)

Ta có : $\begin{cases}BC\perp A'O\\ BC\perp AI\\ A'O\cap AI=\{O\}\\ A'O,AI\subset(A'AI)\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AI)\Rightarrow BC\perp A'I$.

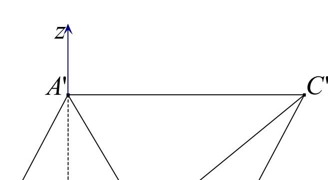


Mặt khác : $\begin{cases}(A'BC)\cap(ABC)=BC\\ (ABC):AI\perp BC\\ (A'BC):A'I\perp BC\end{cases}$

Nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$

và mặt phẳng (ABC) bằng góc $\widehat{A'IA}=\alpha$.

Có $OI=\dfrac{1}{3}AI=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $A'O^2=AA'^2-AO^2=(2a)^2-\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{11a^2}{3}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{A'O}{OI}=2\sqrt{11}$.



[Cách 2]:Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$

$A'O=\sqrt{A'A^2-AO^2}=\frac{a\sqrt{33}}{3}\Rightarrow A'\left(0;0;\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$.

$\overrightarrow{A'B}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$; $\overrightarrow{BC}=(-a;0;0)$.

Véctơ pháp tuyến của $(A'BC)$ là: $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{33}}{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$.

Véctơ pháp tuyến của (ABC) là: $\vec{n}=\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có: $\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\vec{n}\right)\right|=\sqrt{\frac{3}{135}}\Rightarrow \tan\alpha=2\sqrt{11}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SC tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N là trung điểm các cạnh bên SA và SB. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (DMN).

A. $\frac{a\sqrt{60}}{31}$. B. $\frac{a\sqrt{31}}{\sqrt{60}}$. C. $\frac{a\sqrt{31}}{2\sqrt{5}}$. D. $\frac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{31}}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Ta có SA cắt (DMN) tại M $\Rightarrow \frac{d(S,(DMN))}{d(A,(DMN))}=\frac{SM}{AM}=1$

$\Rightarrow d(S,(DMN))=d(A,(DMN))$.

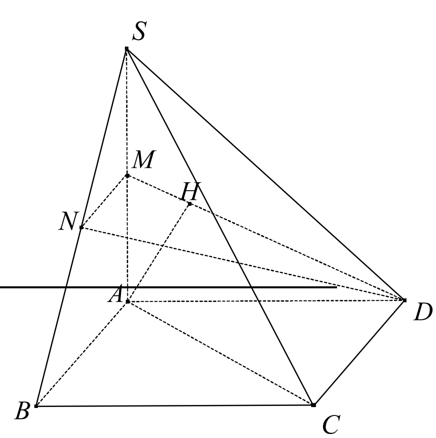
Kẻ $AH\perp MD$

Ta có : $\begin{cases} MN//AB \\ AB\perp(SAD)\end{cases}\Rightarrow MN\perp(SAD)$.

Mà $AH\subset(SAD)\Rightarrow MN\perp AH$.

Ta có: $\begin{cases} AH\perp MD \\ AH\perp MN \\ MD\cap MN=\{M\} \\ MD, MN\subset(DMN)\end{cases}\Rightarrow AH\perp(DMN)$

hay $d(A,(DMN))=AH$.



Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Nên góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCA}=60^0$.

Tam giác SAC vuông tại A suy ra: $SA=\tan 60^0.AC=a\sqrt{15}$.

Xét tam giác MAD vuông tại A nên: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{4}{15a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{31}{60a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{60}}{\sqrt{31}}$.

Vậy $d\left(S,(DMN)\right)=\frac{a\sqrt{60}}{\sqrt{31}}$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

Ta có: $d\left(S,(DMN)\right)=\frac{3V_{SMND}}{S_{\Delta MND}}$.

Ta có: $\begin{cases} MN//AB \\ AB\perp(SAD) \end{cases}\Rightarrow MN\perp(SAD)\Rightarrow MN\perp MD$.

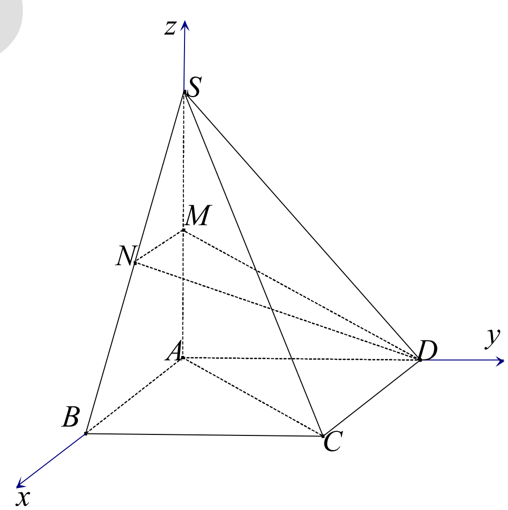
Tam giác MND vuông tại M : $S_{\Delta MND}=\frac{1}{2}MN.MD=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{31}}{2}=\frac{a^2\sqrt{31}}{8}$.

Mặt khác $\frac{V_{SMND}}{V_{SABD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{SMND}=\frac{1}{4}V_{SABD}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}V_{SABD}=\frac{1}{8}\frac{1}{3}SA.AB.AD=\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Vậy $d\left(S,(DMN)\right)=\frac{a\sqrt{60}}{\sqrt{31}}$.

[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:



$A(0;0;0)$; $S\left(0;0;a\sqrt{15}\right)$; $D(0;2a;0)$;

$M\left(0;0;\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)$; $N\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{DM}=\left(0;-2a;\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)$; $\overrightarrow{DN}=\left(\frac{a}{2};-2a;\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)$;

$\overrightarrow{DS}=\left(0;-2a;a\sqrt{15}\right)$

$d\left(S;(DMN)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right].\overrightarrow{DS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{60}}{31}$.

Câu 59. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa AM và CD.

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{4}$. D. $a\sqrt{2}$.

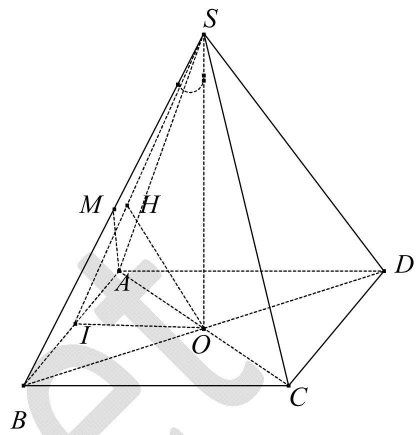
Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Hình chóp $SABCD$ đều, O là tâm của đáy nên $SO \perp (ABCD)$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.



Góc giữa SB và (SAC) là góc giữa SB và SO bằng góc $\widehat{SOB} = 60^0$.

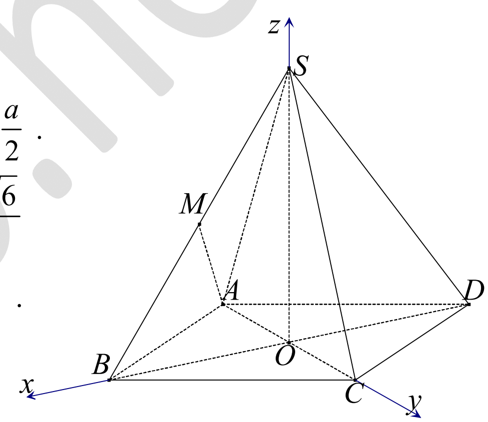
Ta có $\begin{cases} CD // AB \\ AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CD // (SAB)$.

Mà $AM \subset (SAB)$ nên $d(AM, CD) = d(CD, (SAB)) = 2d(O, SAB)$.

Gọi I là trung điểm của AB . Kẻ $OH \perp SI$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI)$ mà $OH \subset (SIO) \Rightarrow OH \perp AB$.

Lại có $\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$.



Vì OI là đường trung bình của tam giác ABD nên $OI = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$.

Tam giác SBO vuông tại O nên ta có: $SO = \frac{OB}{\tan 60^0} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{10}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{10}} .$$

Vậy $d(AM, CD) = d(CD, (SAB)) = 2d(O, (SAB)) = 2OH = \frac{2a}{\sqrt{10}}$.

[Cách 2]:Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ sao cho: $O(0;0;0)$; $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$; $A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $\overrightarrow{AS} = \left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$; $\overrightarrow{AC} = \left(0;a\sqrt{2};0\right)$

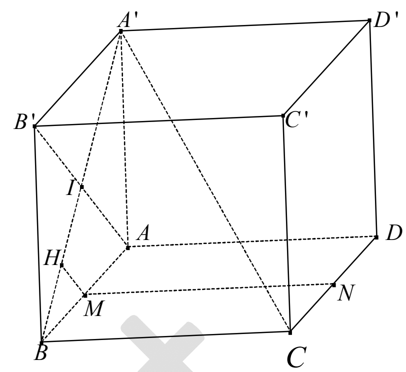
$$\Rightarrow d(AM, CD) = d(C, (SAB)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right]\right|} = \frac{2a}{\sqrt{10}}$$

Câu 60. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Tính khoảng cách giữa $A'C$ và MN

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Ta có $BC//MN \Rightarrow MN//\left(A'BC\right)$

$\Rightarrow d\left(MN, A'C\right) = d\left(MN,\left(A'BC\right)\right) = d\left(M,\left(A'BC\right)\right)$

Gọi $I = A'B \cap AB'$ và H là trung điểm của BI.

Ta có $\begin{cases} MH//AI \\ AI \perp A'B \end{cases} \Rightarrow MH \perp A'B$.

Lại có : $\begin{cases} MH \perp A'B \\ MH \perp BC \ \left(BC \perp \left(ABB'A'\right)\right) \end{cases} \Rightarrow MH \perp \left(A'BC\right)$

Do đó:

$d\left(MN, A'C\right) = d\left(M,\left(A'BC\right)\right) = MH = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{4}AB' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ sao cho: $A\left(0;0;0\right)$; $B\left(a;0;0\right)$; $C\left(a;a;0\right)$; $A'\left(0;0;a\right)$; $M\left(\frac{a}{2};0;0\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{BA'} = \left(-a;0;a\right)$; $\overrightarrow{BC} = \left(0;a;0\right)$; $\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{a}{2};0;0\right)$

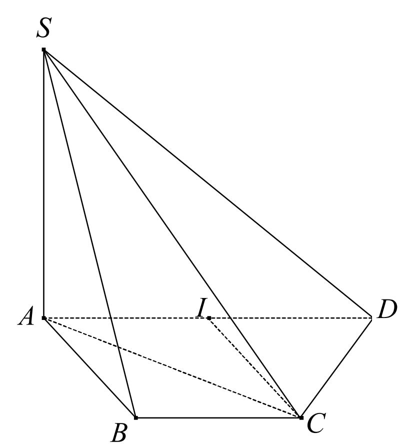
$d\left(MN;A'B\right) = d\left(MN;\left(A'BC\right)\right) = d\left(M;\left(A'BC\right)\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}\right]\right|} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân $AD//BC$, $AD = 2a$, $BC = CD = a$. Biết $SA \perp \left(ABCD\right)$, $SA = 3a$. Tính $\cos$ góc giữa hai đường thẳng SC và AD.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Ta có $AD//BC$ nên góc giữa hai đường thẳng SC và AD là góc giữa hai đường thẳng SC và BC.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AB = CD = a$.

Gọi I là trung điểm của AD.

Ta có: $\begin{cases} AI = BC = \frac{1}{2}AD \\ AI//BC \end{cases}$ nên tứ giác $AICB$ là hình bình hành

nên $CI = AB = a$.

Tam giác ACD có $CI = \frac{1}{2}AD$ $\Rightarrow$ tam giác ACD vuông tại C.

Tam giác ACD vuông tại C nên ta có:

$AC^2 = AD^2 - CD^2 = \left(2a\right)^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

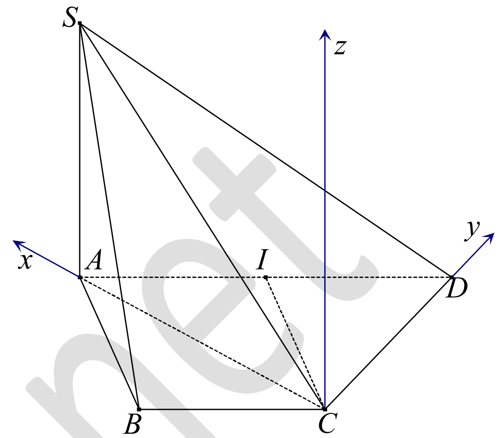
Tam giác SAC vuông tại A nên ta có: $SC^2 = SA^2 + AC^2 = \left(3a\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 = 12a^2 \Rightarrow SC = 2a\sqrt{3}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên ta có: $SB^2 = SA^2 + AB^2 = (3a)^2 + a^2 = 10a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{10}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác SBC : $\cos\widehat{SCB} = \dfrac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2SC.BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AD bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp toạ độ.



Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ ta có:

$C(0;0;0); A\left(a\sqrt{3};0;0\right); D(0;a;0); S(0;0;3a)$

Suy ra: $\overrightarrow{SC} = (0;0;-3a); \overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$

$\cos(SC, AD) = \left|\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}\right|}{SC.AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

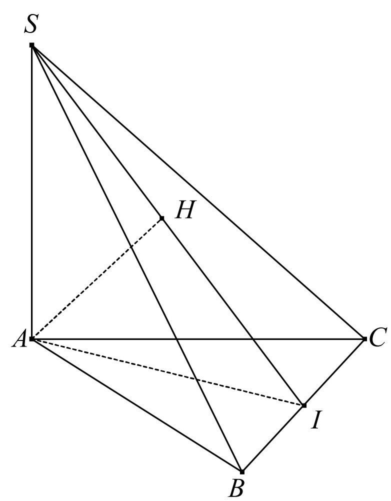
Vậy cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AD bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = CA = a$, cạnh bên $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tính góc giữa SA và (SBC).

A. $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\arctan\sqrt{2}$. C. $\arctan 2\sqrt{2}$. D. $\arctan 2$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]



Gọi I là trung điểm cạnh BC. Kẻ $AH \perp SI$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Mà $AH \subset (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$.

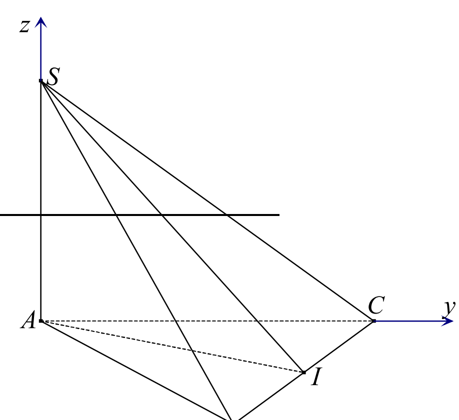
Ta có: $\begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra : góc giữa SA và (SBC) là góc giữa SA và SH bằng góc $\widehat{ASI}$.

Tam giác SAI vuông tại A : có $SA = a,\ AI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\tan\widehat{ASI} = \dfrac{AI}{AS} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ .Vậy góc giữa SA và (SBC) bằng $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

[Cách 2]: Gán hệ trục tọa độ



Chọn hệ trục toạ độ sao cho:

$A(0;0;0); B;(a;0;0); C(0;a;0); S(0;0;a)$

Ta có : $\overrightarrow{BS} = (-a;0;a), \overrightarrow{BC} = (-a;a;0)$

Suy ra: $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right]=\left(-a^2;-a^2;-a^2\right)=\left(-a^2\right)(1;1;1)$

Mặt phẳng (SBC) có véctơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(1;1;1)$.

Đường thẳng SA có véctơ chỉ phương là: $\vec{k}=(0;0;1)$.

Suy ra: $\sin\left(SA;(SBC)\right)=\left|\cos\left(\vec{n};\vec{k}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cot\left(SA;(SBC)\right)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow\tan\left(SA,(SBC)\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy góc giữa SA và (SBC) bằng $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.