$$I=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{(t^2-2t+2)(t-1)}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{t^3-3t^2+4t-2}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_2^4\left(t-3+\frac{4}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-3t+4\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Bigg|$$
$$=2\ln 2-\frac{1}{4}$$

Câu 17. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^1\frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx$ là

A. $\frac{1}{900}\left[2^{100}-1\right]$. B. $\frac{1}{900}\left[2^{101}-1\right]$. C. $\frac{1}{900}\left[2^{99}-1\right]$. D. $\frac{1}{900}\left[2^{98}-1\right]$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}\frac{dx}{(2x+1)^2}=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}d\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{100}\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}\Bigg|_0^1=\frac{1}{900}[2^{100}-1]$$

Câu 18. Tích phân $I=\int_1^2\frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002.2^{1001}}$. B. $\frac{1}{2001.2^{1001}}$. C. $\frac{1}{2001.2^{1002}}$. D. $\frac{1}{2002.2^{1002}}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_1^2\frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}}.dx=\int_1^2\frac{1}{x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{1002}}.dx$. Đặt $t=\frac{1}{x^2}+1\ \Rightarrow\ dt=-\frac{2}{x^3}dx$.

Câu 19. Giá trị của tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=3x-\frac{2\pi}{3}$. Khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $u=\frac{\pi}{3}$, khi $x=\frac{2\pi}{3}$ thì $u=\frac{4\pi}{3}$.

Ta có $du=3dx\Rightarrow dx=\frac{du}{3}$.

Do đó:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos u du = \frac{1}{3}\sin u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 20. Giá trị của tích phân $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 2x dx$ là

A. $\frac{\pi}{8}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\cos 2x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}(x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

Câu 21. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ là

A. $\frac{\pi^2}{4}$. B. $\frac{\pi^2}{6}$. C. $\frac{\pi^2}{8}$. D. $\frac{\pi^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$x=\pi-t \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow I=\int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - I$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\pi\int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t} = \pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow I=\frac{\pi^2}{4}$$

Câu 22. Giá trị tích phân $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 x+1\right)\cos x dx$ là

A. $\frac{6}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 x+1\right)\cos x dx = \left(\frac{1}{5}\sin^5 x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{5}$$

Câu 23. Giá trị tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ là

A. $\frac{1}{2}\ln 2$.
B. $\frac{1}{2}\ln 3$.
C. $\ln 2$.
D. $\frac{3}{2}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

$Coi: t=\sqrt{1+\sin 2x}\Rightarrow t^2=1+\sin 2x\Rightarrow 2tdt=2\cos 2xdx$

$\Rightarrow dx=\frac{tdt}{t(\cos x-\sin x)}\Rightarrow I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{t}dt=\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{2}}=\ln(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln 2$

Câu 24. Giá trị tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$ là

A. $\frac{1}{3}\ln 4$.
B. $\frac{2}{3}\ln 4$.
C. $\frac{2}{3}\ln 2$.
D. $\frac{1}{3}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

$Coi: t=1+3\cos x\Rightarrow dt=-3\sin xdx\Rightarrow dx=\frac{-dt}{3\sin x}\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{1}{t}dt=\frac{\ln|t|}{3}=\frac{1}{3}\ln 4$

Câu 25. Giá trị của tích phân $I=2\int_1^2\sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 xdx$ là

A. $\frac{12}{91}$.
B. $\frac{21}{91}$.
C. $\frac{21}{19}$.
D. $\frac{12}{19}$.

Hướng dẫn giải

$Coi: t=\sqrt[6]{1-cos^3x}\Leftrightarrow t^6=1-cos^3x\Rightarrow 6t^5dt=3\cos^2 x\sin xdx$

$\Rightarrow dx=\frac{2t^5dt}{\cos^2 x\sin x}\Rightarrow I=2\int_0^1 t^6\left(1-t^6\right)dt=2\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^{13}}{13}\right)\Big|_0^1=\frac{12}{91}$

Câu 26. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$ là

A. $\frac{3}{8}$.
B. $\frac{1}{8}$.
C. $\frac{5}{8}$.
D. $\frac{7}{8}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\tan x+1)^3\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+1$

Câu 27. Giá trị của tích phân I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$ là

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x=\frac{\pi}{2}-u\ \Rightarrow dx=-du$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$; x = $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ u = 0. Vậy

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]^3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}$$

Vậy: 2I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\left.\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

Câu 28. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 xdx$ là

A. $I=\frac{\pi}{32}$. B. $I=\frac{\pi}{16}$. C. $I=\frac{\pi}{8}$. D. $I=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 2xdx=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin^2 2xdx$$

$$=\left.\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{\sin^3 2x}{24}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{32}.$$

Câu 29. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)dx$ là

A. $I=\frac{33}{128}\pi$. B. $I=\frac{32}{128}\pi$. C. $I=\frac{31}{128}\pi$. D. $I=\frac{30}{128}\pi$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)=\frac{33}{64}+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{3}{64}\cos 8x \Rightarrow I=\frac{33}{128}\pi$.

Câu 30. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}}dx$ là

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}}dx$. Đặt $t=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x \Rightarrow$ I = $\int_{1}^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$ = $\frac{4}{3}\sqrt{t}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{2}{3}$.

Câu 31. Giá trị của tích phân $I=\int_{0}^{\pi}\frac{xdx}{\sin x+1}$ là

A. $I=\pi$. B. $I=\frac{\pi}{2}$. C. $I=\frac{\pi}{3}$. D. $I=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$ Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)dt}{\sin(\pi-t)+1}=\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{\sin t+1}-\frac{t}{\sin t+1}\right)dt=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{dt}{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{4}\int_{0}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{d\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{0}^{\pi}=\pi.$$

Tổng quát: $\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx$.

Câu 32. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2007}x}{\sin^{2007}x+\cos^{2007}x}dx$ là

A. $I=\frac{\pi}{4}$. B. $I=\frac{\pi}{2}$. C. $I=\frac{3\pi}{4}$. D. $I=\frac{5\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$. Vậy

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2007}t}{\sin^{2007}t+\cos^{2007}t}dx=J \text{ (1).}$$

Mặt khác $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I=\frac{\pi}{4}$.

Tổng quát: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\frac{\pi}{4},n\in\mathbb{Z}^+$.

Câu 33. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}xdx$ là

A. $\frac{256}{693}$. B. $\frac{254}{693}$. C. $\frac{252}{693}$. D. $\frac{250}{693}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}xdx=\frac{10!!}{11!!}=\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11}=\frac{256}{693}.$$

Câu 34. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx$ là

A. $\frac{63\pi}{512}$. B. $\frac{61\pi}{512}$. C. $\frac{67\pi}{512}$. D. $\frac{65\pi}{512}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx = \frac{9!!}{10!!}.\frac{\pi}{2} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.\frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512}$$

Công thức Walliss (dùng cho trắc nghiệm):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ neáu n leû} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}.\dfrac{\pi}{2}, \text{ neáu n chaün} \end{cases}.$$

Trong đó: n!! đọc là **n walliss** và được định nghĩa dựa vào n lẻ hay chẵn.

Chẳng hạn:

$0!! = 1;\ 1!! = 1;\ 2!! = 2;\ 3!! = 1.3;\ 4!! = 2.4;\ 5!! = 1.3.5;$

$6!! = 2.4.6;\ 7!! = 1.3.5.7;\ 8!! = 2.4.6.8;\ 9!! = 1.3.5.7.9;\ 10!! = 2.4.6.8.10.$

Câu 35. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ là

A. $\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$. B. $\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$. C. $2\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$. D. $2\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.

Hướng dẫn giải

$$Vì: \frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow I = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{d\left(1+e^x\right)}{1+e^x}$$

$$= 1 - \ln\left|1+e^x\right|\Big|_0^1 = 1 - \ln(1+e) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

Câu 36. Giá trị của tích phân $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ là

A. $\frac{20}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$Coi: t = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x} \Rightarrow I = 2\int_1^2 \left(t^2+1\right) dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Big|_1^2 = \frac{20}{3}$$

Câu 37. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ là

A. $\frac{4-\pi}{2}$. B. $\frac{4-\pi}{3}$. C. $\frac{5-\pi}{3}$. D. $\frac{5-\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

$Coi: t=\sqrt{e^x-1} \Rightarrow t^2=e^x-1 \Rightarrow 2tdt=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+1}$

$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{4-\pi}{2}$

Câu 38. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}dx$ là

A. $\sqrt{2}-1$. B. $2\sqrt{2}-1$. C. $\sqrt{2}-2$. D. $2\sqrt{2}-2$.

Hướng dẫn giải

$Coi: t=\sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow t^2=e^x+1 \Leftrightarrow 2tdt=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x} \Rightarrow I=2\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{tdt}{t^3}=-2.\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}}^{2}=\sqrt{2}-1$

Câu 39. Giá trị của tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$ là

A. $\ln 2$. B. $\ln 3$. C. $2\ln 3$. D. $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\ln x$; $x=e \Rightarrow t=1,\ x=e^2 \Rightarrow t=2 \ \Rightarrow I=\int_1^2\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^2=\ln 2$.

Câu 40. Giá trị của tích phân: $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}dx}{e^x-1+\sqrt{e^x-2}}$ là

A. 2ln3 – 1. B. $2\ln 2-1$. C. $\ln 3-1$. D. $\ln 2-1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{e^x-2}$, Khi $x=ln2 \Rightarrow t=0;\ x=ln3 \Rightarrow t=1; e^x=t^2+2 \Rightarrow e^x dx=2tdt$

I = $2\int_0^1\frac{(t^2+2)tdt}{t^2+t+1}$ = $2\int_0^1(t-1+\frac{2t+1}{t^2+t+1})dt$ = $2\int_0^1(t-1)dt$ + $2\int_0^1\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}$

= $(t^2-2t)\Big|_0^1$ + $2\ln(t^2+t+1)\Big|_0^1$ = 2ln3 – 1.

Câu 41. Cho $M=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$. Giá trị của e^M là

A. $\frac{11}{4}$.   B. $\frac{9}{4}$.   C. $\frac{7}{4}$.   D. $\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$M=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x-(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1)}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$$

$$=\int\limits_0^{\ln 2}\left(\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}-1\right)dx=\ln\left(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1\right)\Big|_0^{\ln 2}-x\Big|_0^{\ln 2}=\ln\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow e^M=\frac{11}{4}$$

Câu 42. $I=\int\limits_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx$.

A. $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$.   B. $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5}-\sqrt[3]{2^4}\right]$.   C. $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^5}\right]$.   D. $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5}-\sqrt[3]{2^5}\right]$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int\limits_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx=\int\limits_1^e\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}d\left(\ln x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_1^e\left(2+\ln^2 x\right)^{\frac{1}{3}}d\left(2+\ln^2 x\right)$$

$$=\frac{3}{8}.\sqrt[3]{\left(2+\ln^2 x\right)^4}\Big|_1^e=\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$$

Câu 43. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ là

A. $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.   B. $I=\frac{\pi}{4}\ln 2$.   C. $I=\frac{\pi}{8}\ln 3$.   D. $I=\frac{\pi}{8}\ln 3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$. Đổi biến: $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt.$$

Đặt $t=\frac{\pi}{4}-u\Rightarrow dt=-du$; Đổi cận: $t=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{t}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=0$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan u\right)du = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.$$

Vậy $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Câu 44. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-x)+2f(x)=\cos x$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. $I = \frac{2}{3}$. B. $I = \frac{4}{3}$. C. $I = \frac{1}{3}$. D. $I = 1$.

Hướng dẫn giải

Xét tích phân $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$. Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$.

Suy ra: $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = I$.

Do đó: $3I = J + 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(-x)+2f(x)\right]dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = 2$.

Vậy $I = \frac{2}{3}$.

II. VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Tìm hai số thực A, B sao cho $f(x) = A\sin\pi x + B$, biết rằng $f'(1) = 2$ và $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

A. $\begin{cases} A = -\dfrac{2}{\pi} \\ B = 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} A = 2 \\ B = -\dfrac{2}{\pi} \end{cases}$. C. $\begin{cases} A = -2 \\ B = \dfrac{2}{\pi} \end{cases}$. D. $\begin{cases} A = -2 \\ B = -\dfrac{2}{\pi} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

$f(x) = A\sin\pi x + B \Rightarrow f'(x) = A\cos\pi x$

$f'(1) = 2 \Rightarrow A\pi\cos\pi = 2 \Rightarrow A = -\dfrac{2}{\pi}$

$\int_0^2 f(x)dx = 4 \Rightarrow \int_0^2 (A\sin\pi x + B)dx = 4$

$-\dfrac{A}{\pi}\cos 2\pi + 2B + \dfrac{A}{\pi}\cos 0 = 4 \Rightarrow B = 2$

Câu 2. Giá trị của a để đẳng thức $\int_1^2 \left[a^2 + (4-4a)x + 4x^3\right]dx = \int_2^4 2x dx$ là đẳng thức đúng

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

$$12 = \int_1^2 \left[a^2 + (4-4a)x + 4x^3\right]dx = \left[a^2x + (2-2a)x^2 + x^4\right]\Big|_1^2$$
$$\Rightarrow a = 3.$$

Câu 3. Giá trị của tích phân $I = \int_0^a \dfrac{dx}{x^2 + a^2}$ $(a > 0)$ là

A. $\dfrac{\pi}{4a}$. B. $\dfrac{\pi^2}{4a}$. C. $-\dfrac{\pi^2}{4a}$. D. $-\dfrac{\pi}{4a}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = a\tan t;\ t \in \left(\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a(1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$. Vậy

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t + a^2}dt = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4a}.$$

Câu 4. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}}dx$ là

A. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$. B. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. C. $\dfrac{4\pi}{\sqrt{2}}$. D. $\dfrac{-\pi}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$. Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Vậy

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}} dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{3-2t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-t^2}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{3}{2}} \cos u \quad \Rightarrow \quad dt=-\sqrt{\frac{3}{2}} \sin u du$. Đổi cận : $\begin{cases} t=0 \to u=\dfrac{\pi}{2} \\ t=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \to u=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$, suy ra

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u du}{\sqrt{\frac{3}{2}\left(1-\cos^2 u\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} du=\frac{1}{\sqrt{2}} u \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Câu 5. Cho $I=\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$. Tích phân nào sau đây có giá trị bằng với giá trị của tích phân đã cho.

A. $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$. B. $\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$. C. $-\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$. D. $-\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$.

Hướng dẫn giải

$u=\dfrac{1}{t} \Rightarrow t=\dfrac{1}{u} \Rightarrow dt=-\dfrac{1}{u^2} du$

$\begin{cases} t=x \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{x} \\ u=1 \end{cases}$

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{-\frac{1}{u^2} du}{1+\frac{1}{u^2}}=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{-du}{u^2+1}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^2+1} \Rightarrow \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

Câu 6. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx$ là

A. $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. B. $\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

C. $-\sqrt{3}\ln 2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. D. $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} u=\ln(\sin x)\Rightarrow du=\cot^2 x dx \\ dv=\dfrac{1}{\sin^2 x}dx\Rightarrow v=-\cot x \end{cases}$$

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx=-\cot x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 xdx$$

$$=\left(\sqrt{3}\ln\frac{1}{2}-\cot x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

Câu 7. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2\min\left\{1,x^2\right\}dx$ là

A. $\frac{3}{4}$. B. 4. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Xét hiệu số $1-x^2$ trên đoạn $[0;2]$ để tìm $\min\left\{1,x^2\right\}$. Vậy

$$I=\int\limits_0^2\min\left\{1,x^2\right\}dx=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^2 dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+x\Big|_1^2=\frac{4}{3}.$$

Câu 8. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx$ là

A. $\ln\frac{2}{3}$. B. 2. C. $-\ln 2$. D. $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow dx=-2tdt$. Đổi cận $\begin{cases} x=-8\Rightarrow t=3 \\ x=-3\Rightarrow t=2 \end{cases}$. Vậy

$$I=\int\limits_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx=\int\limits_3^2\frac{-2tdt}{\left(1-t^2\right)t}=2\int\limits_2^3\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)t}=2\int\limits_2^3\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_2^3=\ln\frac{2}{3}.$$

Câu 9. Biết $I=\int_1^a \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$. Giá trị của a là

A. 2. B. $\ln 2$. C. π. D. 3.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_1^a \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$$
$$=\int_1^a xdx-2\int_1^a \frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$$
$$=(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2})-2(\frac{1}{a}\ln a+\frac{1}{a}-1)=\frac{1}{2}+\ln 2$$
$$\Rightarrow a=2$$

HD casio: Nhập $\int_1^2 \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx-\frac{1}{2}-\ln 2=0$ nên $a=2$.

Câu 10. Cho $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx$. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $I_2=2\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$. B. $I_1>I_2$. C. $I_1=\frac{14}{9}$. D. $I_2=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx=\int_1^4\frac{\sqrt{t}}{3}dt=\frac{14}{9}$$
$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx=2\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$$

Câu 11. Tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn $\int_0^m(2x+5)dx=6$ là

A. $m=1, m=-6$. B. $m=-1, m=-6$. C. $m=-1, m=6$. D. $m=1, m=6$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^m(2x+5)dx=6\Rightarrow (x^2+5x)\Big|_0^m=6\Rightarrow m^2+5m-6=0\Rightarrow m=1,\ m=-6.$$

Hướng dẫn casio: Thay $m=1$ và $m=-6$ vào thấy thỏa mãn.

Câu 12. Cho hàm số $h(x)=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$. Tìm để $h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}$ và tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx$

A. $a=-4,\ b=2;\ I=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}$.

B. $a=4,\ b=-2;\ I=-\frac{2}{3}-2\ln\frac{3}{2}$.

C. $a=2,\ b=4;\ I=-\frac{1}{3}+4\ln\frac{3}{2}$.

D. $a=-2,\ b=4;\ I=\frac{1}{3}+4\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng đồng nhất thức, ta thấy

$$h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}=\frac{a\cos x+b\cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{b}{2}=1\\ a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=2\end{cases}.$$

Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-4\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{2\cos x}{2+\sin x}\right)dx=\left(-\frac{4}{2+\sin x}+2\ln|2+\sin x|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{3}+2\ln 3+2-2\ln 2$$
$$=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}.$$

Câu 13. Giá trị trung bình của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$, kí hiệu là $m(f)$ được tính theo công thức $m(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Giá trị trung bình của hàm số $f(x)=\sin x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\frac{2}{\pi}$.

B. $\frac{3}{\pi}$.

C. $\frac{1}{\pi}$.

D. $\frac{4}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

$$m(f)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}.$$

Câu 14. Cho ba tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{3x+1}$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx$ và $K=\int_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx$. Tích phân nào có giá trị bằng $\frac{21}{2}$?

A. *K*.

B. *I*.

C. *J*.

D. *J* và *K*.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^1\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 4$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\frac{1}{2}$$

$$K=\int_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx=\frac{21}{2}.$$

Câu 15. Với $0 < a < 1$, giá trị của tích phân sau $\int_0^a \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}dx$ là:

A. $\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$. B. $\ln\left|\frac{a-2}{2a-1}\right|$. C. $\ln\left|\frac{a-2}{2(a-1)}\right|$. D. $\ln\left|\frac{a-2}{2a+1}\right|$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^a \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int_0^a \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_0^a = \ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$$

Câu 16. Cho $2\sqrt{3}m - \int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx = 0$. Khi đó giá trị của $144m^2 - 1$ bằng

A. $\frac{-2}{3}$. B. $4\sqrt{3} - 1$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$2\sqrt{3}.m - \int_0^1 \frac{d(x^4+2)}{(x^4+2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}.m + \frac{1}{(x^4+2)}\Bigg|_0^1 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}m + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

Vậy

$$144m^2 - 1 = 144\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{-2}{3}.$$

Câu 17. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$, đồng thời thỏa mãn $f(a) = f(b)$. Lựa chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = 0$. B. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = 1$.

C. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = -1$. D. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = 2$.

Hướng dẫn giải

$$\int_a^b e^{f(x)}f'(x)dx = \int_a^b e^{f(x)}d(f(x)) = e^{f(x)}\Big|_a^b = e^{f(b)} - e^{f(a)} = 0.$$

Câu 18. Kết quả phép tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ có dạng $I = a\ln 3 + b\ln 5$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Khi đó $a^2 + ab + 3b^2$ có giá trị là

A. 5. B. 1. C. 0. D. 4.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$I=\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=2\int_2^4 \frac{1}{t^2-1}dt=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\ln 3-\ln 5,$$

suy ra $a=2,b=-1$. Vậy $a^2+ab+3b^2=4-2+3=5$.

Câu 19. Với $n\in\mathbb{N},n\geq 1$, tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin xdx$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{n+1}$. B. $\frac{1}{n-1}$. C. $\frac{1}{2n}$. D. $\frac{1}{n}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin xdx=\int_0^1 t^n dt=\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

Câu 20. Với $n\in\mathbb{N},n>1$, giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $-\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{3\pi}{4}$. D. $-\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx=2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

Câu 21. Giá trị của tích phân $\int_0^{2017\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ là

A. $4034\sqrt{2}$. B. $-4043\sqrt{2}$. C. $3043\sqrt{2}$. D. $3034\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Do hàm số $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$ là hàm liên tục và tuần hoàn với chu kì $T=\pi$ nên ta có

$$\int_0^T f(x)dx = \int_T^{2T} f(x)dx = \int_{2T}^{3T} f(x)dx = ... = \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{nT} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx + \int_T^{2T} f(x)dx + ... + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{2017\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = 2017\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = 2017\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx = 4034\sqrt{2}$$

Câu 22. Bất đẳng thức $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{\sqrt{4-x^2}}dx \le M$ luôn đúng khi giá trị của M là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{\sqrt{4-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{\sqrt{4-x^2}}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \arcsin\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{\sqrt{4-x^2}}dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 23. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)dx$ là

A. $2\ln 2 - 1$. B. $-2\ln 2 - 1$. C. $2\ln 3 - 1$. D. $-2\ln 3 - 1$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\ln(1+\sin x)^{1+\cos x} - \ln(1+\cos x)\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dx$$

$x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$

$\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0 \end{cases}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)dx$

$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1+\sin x)dx=2\ln 2-1$

Câu 24. Có mấy giá trị của b thỏa mãn $\int_0^b(3x^2-12x+11)dx=6$

A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải

$\int_0^b(3x^2-12x+11)dx=\left(x^3-6x^2+11x\right)\Big|_0^b=b^3-6b^2+11b-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \\ b=3 \end{array}\right.$.

Câu 25. Biết rằng $\int_0^b 6dx=6$ và $\int_0^a xe^x dx=a$. Khi đó biểu thức $b^2+a^3+3a^2+2a$ có giá trị bằng

A. 7. B. 4. C. 5. D. 3.

Hướng dẫn giải

+Ta có $\int_0^b 6dx=6\Rightarrow b=1$.

+Tính $\int_0^a xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$. Khi đó,

$$\int_0^a xe^x dx=xe^x\Big|_0^a-\int_0^a e^x dx=e^a-e^a+1=a\Rightarrow a=1.$$

Vậy $b^2+a^3+3a^2+2a=7$.

Câu 26. Biết rằng $\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}=A$, $\int_0^{b\pi}2dx=B$ (với $a,b>0$). Khi đó giá trị của biểu thức $4aA+\frac{B}{2b}$ bằng

A. 2π B. π C. 3π D. 4π

Hướng dẫn giải

+Tính $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$

Đặt $t = a\tan x;\ a \in \left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a(1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t + a^2} dt = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4a}$$

+Tính: $\int_0^{b\pi} 2dx = 2b\pi$, suy ra $\frac{B}{2b} = \pi$

Câu 27. Tích phân $\int_0^{\pi} \sin^4 x.\cos^6 x dx$ luôn luôn bé hơn

A. $\frac{243\pi}{6250}$. B. $\frac{234\pi}{6250}$. C. $-\frac{243\pi}{6250}$. D. $-\frac{234\pi}{6250}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy

$$\begin{aligned}\sin^4 x\cos^6 x &= (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x)\cos^2 x\cos^2 x\cos^2 x \\ &= \frac{1}{2}(2-2\cos^2 x)(1-\cos^2 x)\cos^2 x\cos^2 x\cos^2 x \\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{2-2\cos^2 x + 1 - \cos^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x}{5}\right)^3 \\ &= \frac{243}{6250}\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^6 x dx \le \frac{243\pi}{6250}$.