A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{9}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

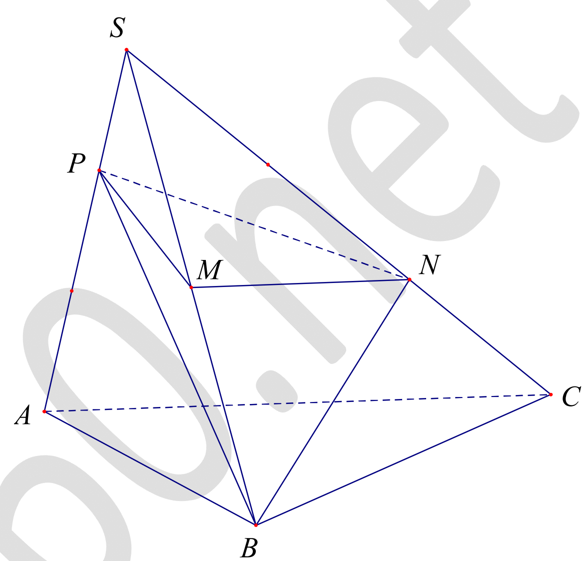
Hướng dẫn giải

$$\frac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot d(N,(SAB))\cdot S_{BMP}}{\frac{1}{3}\cdot d(C,(SAB))\cdot S_{SAB}};$$

$$\frac{d(N,(SAB))}{d(C,(SAB))} = \frac{NS}{CS} = \frac{2}{3},$$

$$S_{BPM} = \frac{1}{2}S_{BPS} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{SAB}$$

Suy ra, $\frac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$.

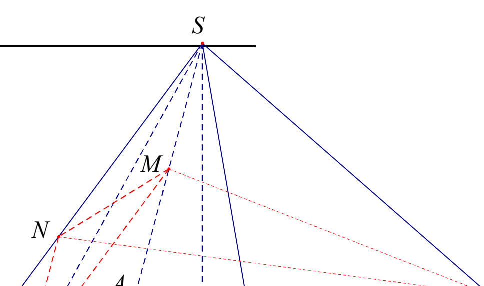


Câu 14. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $45°$; M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và AB. Tính thể tích V của khối tứ diện $DMNP$.

Hướng dẫn giải:

A. $V = \frac{a^3}{6}$ **B.** $V = \frac{a^3}{4}$ **C.** $V = \frac{a^3}{12}$ **D.** $V = \frac{a^3}{2}$

Hướng dẫn giải



Ta có: $\frac{S_{SMN}}{S_{SAB}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{4}$.

Tương tự, $\frac{S_{BNP}}{S_{SAB}} = \frac{1}{4}, \frac{S_{AMP}}{S_{SAB}} = \frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{S_{MNP}}{S_{SAB}} = \frac{1}{4}$ (có thể khẳng định $\frac{S_{MNP}}{S_{SAB}} = \frac{1}{4}$ nhờ hai tam giác MNP và BAS là hai tam giác đồng dạng với tỉ số $k = \frac{1}{2}$).

Do đó $\frac{V_{D.MNP}}{V_{D.SAB}} = \frac{1}{4}$ (1)

$V_{D.SAB} = V_{S.DAB} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$. (2)

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} OP.\tan 45^\circ.S_{ABCD} = \frac{4a^3}{3}$ (3). Từ (1), (2) và (3): $V_{DMNP} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{4a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$.

Câu 15. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = \sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AC. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \frac{a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{1}{2}a^3$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

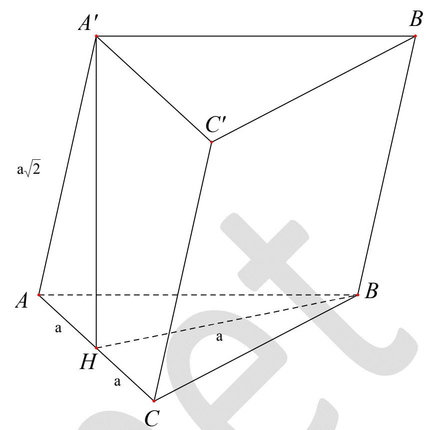
Hướng dẫn giải

Vì ABC là tam giác vuông cân tại B nên trung tuyến BH cũng là đường cao của nó, và

$HB = HA = HC = \frac{1}{2}AC = a$.

$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = A'H \cdot \frac{1}{2}BH \cdot AC = a^3$



Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt ABC, ABD, ACD và BCD. Biết $AB = 6a$, $AC = 9a$, $AD = 12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

A. $4a^3$ B. a^3 C. $108a^3$ D. $36a^3$

Hướng dẫn giải

Trong trường hợp tổng quát, ta chứng minh được $\boxed{V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{1}{27}V_{ABCD}}$.

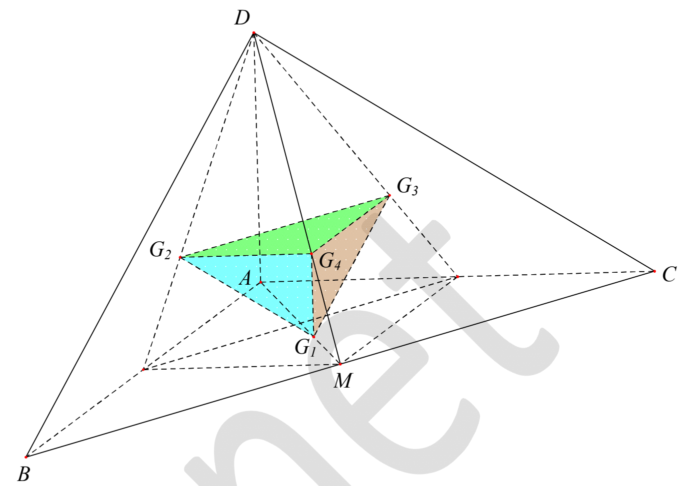
Thật vậy,

ta có $(G_2G_3G_4) \parallel (CBA)$ và $\triangle G_2G_3G_4) \sim \triangle CBA$ (tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{3}$). Từ đó: $\frac{S_{G_2G_3G_4}}{S_{CBA}} = k^2 = \frac{1}{9}$ và

$d(G_1,(G_2G_3G_4)) = d(G_4,(ABC))$

$= \frac{1}{3}d(D,(ABC))$ (do $G_4M = \frac{1}{3}DM$)

Suy ra



$$\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}} = \frac{d(G_1,(G_2G_3G_4))}{d(D,(ABC))} \cdot \frac{S_{G_2G_3G_4}}{S_{CBA}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

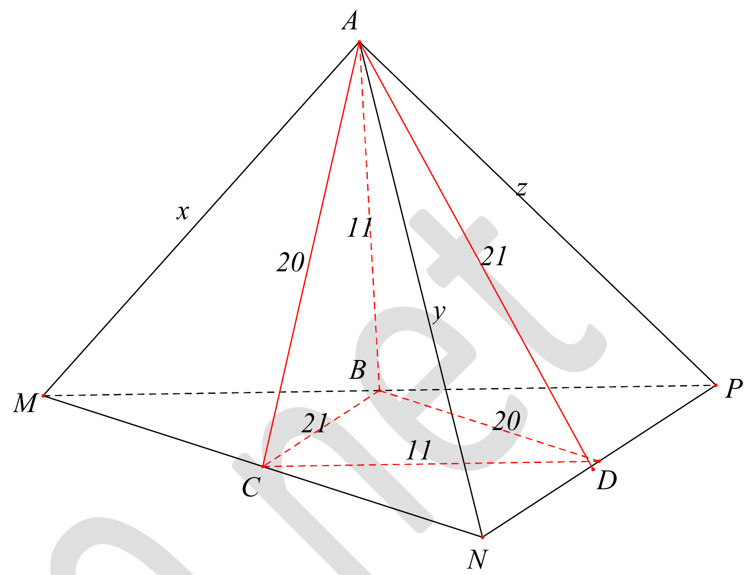
$$\Rightarrow V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{1}{27}V_{ABCD} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{6}.AB.AC.AD = 4a^3$$

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 11m$, $BC = AD = 20m$, $BD = AC = 21m$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $360m^3$ B. $720m^3$ C. $770m^3$ D. $340m^3$

Hướng dẫn giải

Dựng tam giác *MNP* sao cho *C, B, D* lần lượt là trung điểm các cạnh *MN, MP, NP*.



Do *BD* là đường trung bình tam giác *MNP* nên $BD = \frac{1}{2}MN$ hay $AC = \frac{1}{2}MN$.

Tam giác AMN vuông tại A (do có trung tuyến bằng một nửa cạnh tương ứng), hay $AM \perp AN$. Tương tự, $AP \perp AN$ và $AM \perp AP$.

Ta có $S_{MBC} = \frac{1}{4}S_{MNP}$,

$S_{NCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$, $S_{BPD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$.

.

Suy ra $S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$ .Từ đó, $\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AMNP}}$.

Đặt $x = \frac{AM}{m}, y = \frac{AN}{m}, z = \frac{AP}{m}$. Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4.20^2 \\ y^2 + z^2 = 4.21^2 \\ x^2 + z^2 = 4.11^2 \end{cases}$,

suy ra $\begin{cases} x^2 = 160 \\ y^2 = 1440 \\ z^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6}xyz = 1440 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AMNP} = 360m^3$

(*AM, AN, AP* đôi một vuông góc nên $V_{AMNP} = \frac{1}{6}AM.AN.AP$)

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thể tích của khối tứ diện có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau tương ứng a,b,c là

$$\boxed{V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}}$$

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là vuông; mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{2}{3}a^3$. **D.** $V = \frac{1}{3}a^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi *H* là trung điểm *AB*, suy ra *SH* là chiều cao khối chóp đã cho.

Kí hiệu x là độ dài cạnh đáy.

Ta có $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ và $V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}x^3$.

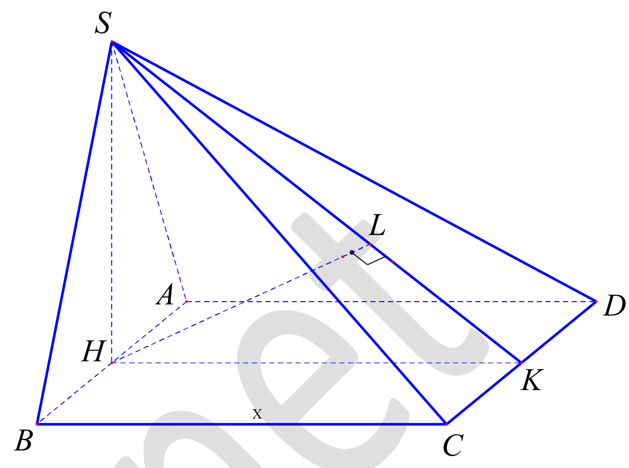
Kẻ $HK \perp CD$ $(K \in CD)$;

Kẻ $HL \perp SK$ $(\mathrm{L} \in SK)$.

Suy ra $HL \perp (SCD)$ và

$d(A,(SCD)) = d(H,(SCD))$

$$= HL = \frac{HS \cdot HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}x$$



Theo gt, $\frac{\sqrt{21}}{7}x = \frac{3\sqrt{7}a}{7} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$. Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}x^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}(a\sqrt{3})^3 = \frac{3}{2}a^3$

Câu 19. Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α), trong đó, (H_1) chứa điểm S, (H_2) chứa điểm A; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC.

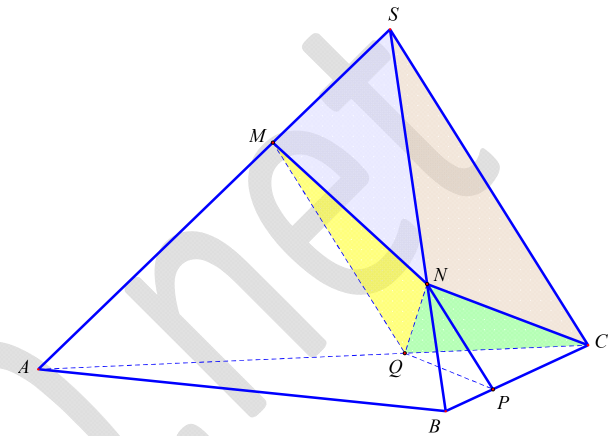
Ta có $NP \parallel MQ \parallel SC$. Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có: $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \dfrac{d(N,(SAC))}{d(\text{B},(SAC))} \cdot \dfrac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$;

$\dfrac{d(N,(SAC))}{d(\text{B},(SAC))} = \dfrac{NS}{BS} = \dfrac{2}{3}$;

$\dfrac{S_{AMQ}}{S_{ASC}} = \left(\dfrac{AM}{AS}\right)^2 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{S_{SMQC}}{S_{ASC}} = \dfrac{5}{9}$.

Suy ra $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{10}{27}$



$\dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{d(N,(\text{QP}C))}{d(\text{S},(\text{A}BC))} \cdot \dfrac{S_{QPC}}{S_{ABC}}$

$= \dfrac{NB}{SB} \cdot \dfrac{CQ}{CA} \cdot \dfrac{CP}{CB} == \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{27}$

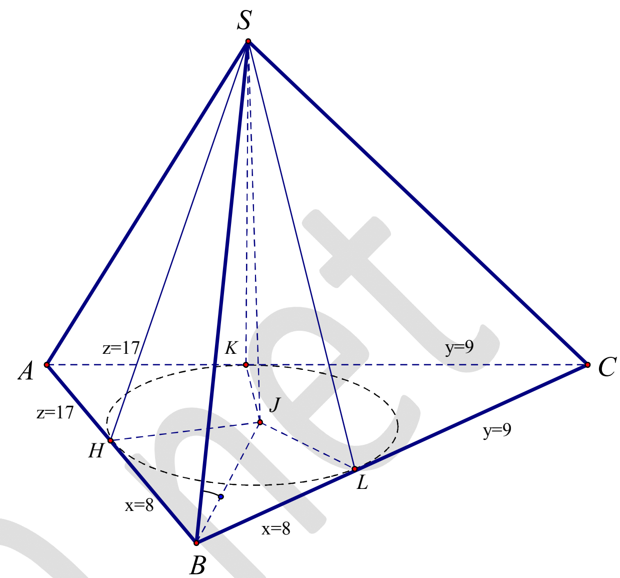
$\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} + \dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{10}{27} + \dfrac{2}{27} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow 5V_1 = 4V_2 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{5}$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC; các mặt phẳng (SAB), (SAC) và (SBC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Biết $AB = 25$, $BC = 17$, $AC = 26$; đường thẳng SB tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 680$. B. $V = 408$. C. $V = 578$. D. $V = 600$.

Hướng dẫn giải

Gọi J là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$; H, K và L lần lượt là hình chiếu của J trên các cạnh AB, BC và CA. Suy ra, $\widehat{SHJ}$, $\widehat{SLJ}$ và $\widehat{SKJ}$ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (SAB), (SBC) và (SAC). Theo giả thiết, ta có $\widehat{SHJ} = \widehat{SLJ} = \widehat{SKJ}$, suy ra các tam giác vuông SJH, SJL và SJK bằng nhau. Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà J nằm trong tam giác ABC nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

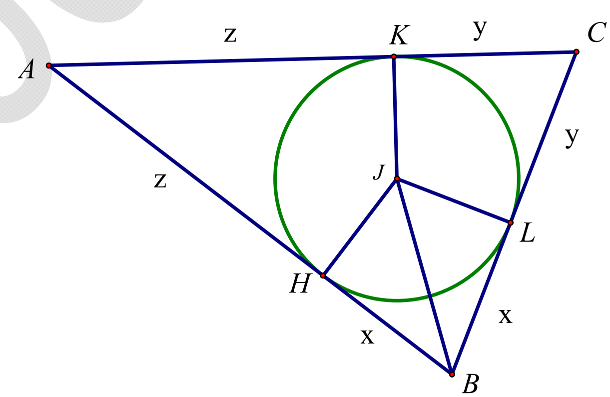


Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích S của tam giác ABC là $S = 204$.

Kí hiệu p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của ABC. Ta có $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{204}{34} = 6$. Đặt $x = BH = BL$,

$y = CL = CK$,

$z = AH = AK$.



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 17 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}$.

Giải ra được $(x;y;z)=(8;9;17)$

$JB=\sqrt{JH^2+BH^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$. Ta có $\widehat{SBJ}=(\widehat{SB,(ABC)})=45^\circ$, suy ra SJB là tam giác vuông cân tại J. $SJ=JB=10$.

Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}SJ.S_{ABC}=680$