

Câu 69. Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0$ là:

- A. $x = 4$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện : $x > 0; x \neq 1; x \neq 3$

$$\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án A.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Loại B, D vì $x \neq 1; x \neq 3$

Loại C vì $x = 2 \Rightarrow \log_2 3 - \log_{\frac{2}{3}} 3 > 0$ Vậy chọn đáp án A.

Câu 70. Phương trình $x^{\ln 7} + 7^{\ln x} = 98$ có nghiệm là:

- A. $x = e^2$. B. $x = 2$. C. $x = e$. D. $x = \sqrt{e}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện : $x > 0; x \neq 1$

Đặt $x = e^t$

$$x^{\ln 7} + 7^{\ln x} = 98 \Leftrightarrow e^{t \cdot \ln 7} + 7^{\ln e^t} = 98 \Leftrightarrow 2 \cdot 7^t = 98 \Leftrightarrow t = 2$$

Chọn đáp án A.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Lần lượt thay $x = 2; x = e; x = \sqrt{e}$ vào phương trình ta được đẳng thức sai, vậy loại B, C, D,

Vậy chọn đáp án A.

Câu 71. Bất phương trình $\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x - 1) + 1$ có tập nghiệm là:

- A. $S = [1 + \sqrt{2}; +\infty)$. B. $S = [1 - \sqrt{2}; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 1 + \sqrt{2}]$. D. $S = (-\infty; 1 - \sqrt{2}]$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện : $x > 2$

$$\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow \log_2[(x^2 - x - 2)(x - 1)] \geq 1 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x - 1) - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0 \\ x \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dựa vào điều kiện ta loại B, C, D,

Vậy chọn đáp án A.

Câu 72. Biết phương trình $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{7}{6} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $x_1^3 + x_2^3 = \frac{2049}{4}$. B. $x_1^3 + x_2^3 = -\frac{2047}{4}$. C. $x_1^3 + x_2^3 = -\frac{2049}{4}$. D.
 $x_1^3 + x_2^3 = \frac{2047}{4}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình đã cho trở thành $3t^2 - 7t - 6 = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^3 = 9 \\ x = 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ 9; \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right\} \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = \frac{2049}{4}$

Câu 73. Số nghiệm nguyên dương của phương trình $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $2^{x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \log_2 3 - 1$.

Ta có: $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2 \frac{4^x + 4}{2^{x+1} - 3} = x \Leftrightarrow \frac{4^x + 4}{2^{x+1} - 3} = 2^x$ (1)

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Ta có (1) $\Rightarrow t^2 + 4 = 2t^2 - 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$.

$\Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

Câu 74. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > 0$ là:

- A. $S = \left(1; \frac{3}{2} \right)$. B. $S = \left(0; \frac{3}{2} \right)$. C. $S = (0; 1)$. D.
 $S = \left(\frac{3}{2}; 2 \right)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ \log_2(2x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2x-1)) > \log_{\frac{1}{2}} 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x-1) < 1 \\ \log_2(2x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x-1 < 2 \\ 2x-1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}. \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 75. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(2x^2 + 3x + 1) > \log_2(2x + 1)$ là:

A. $S = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. B. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. D.

$$S = \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_4(2x^2 + 3x + 1) > \log_2(2x + 1) &\Leftrightarrow \log_4(2x^2 + 3x + 1) > \log_4(2x + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 > 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0. \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 76. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_x(125x) \cdot \log_{25} x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x$ là:

A. $S = (1; \sqrt{5})$. B. $S = (-1; \sqrt{5})$. C. $S = (-\sqrt{5}; 1)$. D.

$$S = (-\sqrt{5}; -1).$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0 < x \neq 1$ (*).

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_x(125x) \cdot \log_{25} x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x &\Leftrightarrow (\log_x 5^3 + \log_x x) \cdot \log_{5^2} x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x \\ &\Leftrightarrow (3 \log_x 5 + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \log_5 x\right) > \frac{3}{2} + \log_5^2 x \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log_5 x > \frac{3}{2} + \log_5^2 x \Leftrightarrow 2 \log_5^2 x - \log_5 x < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \log_5 x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5^0 < x < 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt{5}. \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (1; \sqrt{5})$.

Câu 77. Tích các nghiệm của phương trình $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x \cdot \log_{16} x = \frac{81}{24}$ là :

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. 3.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có: } \log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x \cdot \log_{16} x = \frac{81}{24} \Leftrightarrow (\log_2 x) \left(\frac{1}{2} \log_2 x\right) \left(\frac{1}{3} \log_2 x\right) \left(\frac{1}{4} \log_2 x\right) = \frac{81}{24}$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x = 81 \Leftrightarrow \log_2 x = \pm 3 \Leftrightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = \frac{1}{8}. \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là } S = \left\{ \frac{1}{8}; 8 \right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Câu 78. Phương trình $\log_{\sqrt{3}} |x+1| = 2$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq -1$

$$\text{Ta có: } \log_{\sqrt{3}} |x+1| = 2 \Leftrightarrow |x+1| = 3 \Leftrightarrow x+1 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -4. \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là } S = \{-4; 2\}.$$

Câu 79. Biết phương trình $4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng :

- A. 6642. B. $\frac{82}{6561}$. C. 20. D. 90.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có phương trình tương đương } 2^{2\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^3 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^{\log_9 x}, t > 0. \quad (1) \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$

- Với $t = 2 \Leftrightarrow 2^{\log_9 x} = 2 \Leftrightarrow \log_9 x = 1 \Leftrightarrow x = 9$.

- Với $t = 4 \Leftrightarrow 2^{\log_9 x} = 2^2 \Leftrightarrow \log_9 x = 2 \Leftrightarrow x = 81$.

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là } S = \{9; 81\} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 6642.$$

Câu 80. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\log_2^2 x} - 10x^{\log_2 \frac{1}{x}} + 3 > 0$ là:

A. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. B. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $S = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$ (*). Đặt $u = \log_2 x \Rightarrow x = 2^u$.

Bất phương trình đã cho trở thành $2^{u^2} - 10(2^u)^{-u} + 3 > 0 \Leftrightarrow 2^{u^2} - \frac{10}{2^{u^2}} + 3 > 0$ (1)

Đặt $t = 2^{u^2}$, $t \geq 1$. (1) $\Rightarrow t^2 + 3t - 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -5 \\ t > 2 \end{cases}$ (1) $\Leftrightarrow 2^{u^2} > 2 \Leftrightarrow u^2 > 1 \Leftrightarrow u > 1$

hoặc $u < -1$

- Với $u > 1 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$

- Với $u < -1 \Rightarrow \log_2 x < -1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2$

hoặc $0 < x < \frac{1}{2}$.

Câu 81. Tập nghiệm của phương trình $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$ là:

A. $S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

B. $S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

C. $S = \left\{ \frac{4}{9} \right\}$.

D. $S = \{-2\}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0 < x \neq 1$

Ta có:

$$4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 4^{1+\log_2 x} - 6^{\log_2 x} = 2.3^{2+\log_2 x} \Leftrightarrow 4.4^{\log_2 x} - 6^{\log_2 x} = 19.9^{\log_2 x} \quad (1)$$

Chia 2 vế cho $4^{\log_2 x}$.

$$(1) \Leftrightarrow 18 \cdot \left(\frac{9}{4} \right)^{\log_2 x} + \left(\frac{3}{2} \right)^{\log_2 x} - 4 = 0. \text{ Đặt}$$

$$t = \left(\frac{3}{2} \right)^{\log_2 x} > 0. PT \Rightarrow 18t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{9} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^{\log_2 x} = \left(\frac{4}{9} \right) = \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} \Leftrightarrow \log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}. \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x - \log_3(x-2) = \log_{\sqrt{3}} m$ có nghiệm?

A. $m > 1$.

B. $m \geq 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \leq 1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện $x > 2; m > 0$

$$\log_3 x - \log_3 (x-2) = \log_{\sqrt{3}} m \Leftrightarrow x = (x-2)m^2 \Leftrightarrow x = \frac{2m^2}{m^2-1}$$

Phương trình có nghiệm $x > 2$ khi $m > 1$, chọn đáp án A

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $m = 0$ (thuộc C, D) vào biểu thức $\log_{\sqrt{3}} m$ không xác định, vậy loại C, D,

Thay $m = 1$ (thuộc B) ta được phương trình tương đương $x = x - 2$ vô nghiệm
Vậy chọn đáp án A.

Câu 2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_3 (x^2 + 4x + m) \geq 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. $m \geq 7$. B. $m > 7$. C. $m < 4$. D. $4 < m \leq 7$

Hướng dẫn giải

$$\log_3 (x^2 + 4x + m) \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 3 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 7$$

Vậy chọn A.

Câu 3. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{5}} (mx - x^2) \leq \log_{\frac{1}{5}} 4 \text{ vô nghiệm?}$$

- A. $-4 < m < 4$. B. $\begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \end{cases}$. C. $m < 4$. D. $-4 \leq m \leq 4$.

Hướng dẫn giải

$$\log_{\frac{1}{5}} (mx - x^2) \leq \log_{\frac{1}{5}} 4 \Leftrightarrow mx - x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 \leq 0$$

$$x^2 - mx + 4 \leq 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$$

Vậy chọn A.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2 (mx - x^2) = 2$ vô nghiệm?

- A. $-4 < m < 4$. B. $m < 4$. C. $\begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \end{cases}$. D. $m > -4$.

Hướng dẫn giải

$$\log_2 (mx - x^2) = 2 \Leftrightarrow -x^2 + mx - 4 = 0 (*)$$

$$\text{Phương trình (*) vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$$

Vậy chọn A.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_4^2 x + 3\log_4 x + 2m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt?

- A. $m < \frac{13}{8}$. B. $m > \frac{13}{8}$. C. $m \leq \frac{13}{8}$. D. $0 < m < \frac{13}{8}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 13 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{8}$

Vậy chọn A.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \geq m$ có nghiệm $x \geq 1$?

- A. $m \leq 6$. B. $m > 6$. C. $m \geq 6$. D. $m < 6$.

Hướng dẫn giải

BPT $\Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \leq m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] \leq m$

Đặt $t = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})$ do $x \geq 1 \Rightarrow t \in [2; +\infty)$

BPT $\Leftrightarrow t(1+t) \geq m \Leftrightarrow t^2 + t \geq m \Leftrightarrow f(t) \geq m$

Với $f(t) = t^2 + t$

$f'(t) = 2t + 1 > 0$ với $t \in [2; +\infty)$ nên hàm đồng biến trên $t \in [2; +\infty)$

Nên $\text{Min} f(t) = f(2) = 6$

Do đó để để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \geq m$ có nghiệm $x \geq 1$ thì :

$m \leq \text{Min} f(t) \Leftrightarrow m \leq 6$

chọn đáp án A.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + 2\log_3 x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

- A. $m \leq 2$. B. $m < 2$. C. $m \geq 2$. D. $m > 2$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $x > 0$

PT có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (m - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$, chọn đáp án A

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \leq m$ có nghiệm $x \geq 1$?

- A. $m \geq 2$. B. $m > 2$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$x \geq 1 \Leftrightarrow 5^x - 1 \geq 4 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 2$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$?

- A. $m \in [0; 2]$. B. $m \in (0; 2)$. C. $m \in (0; 2]$. D. $m \in [0; 2)$

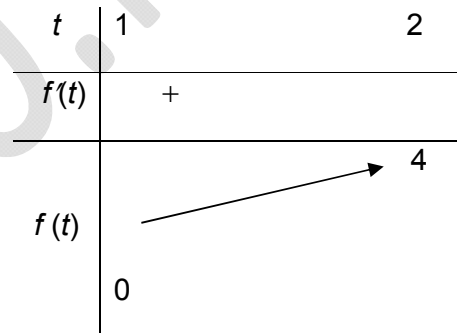
Hướng dẫn giải

$$\text{Với } x \in [1; 3^{\sqrt{3}}] \text{ hay } 1 \leq x \leq 3^{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{\log_3^2 1 + 1} \leq \sqrt{\log_3^2 x + 1} \leq \sqrt{\log_3^2 3^{\sqrt{3}} + 1} \text{ hay } 1 \leq t \leq 2$$

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: “Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$ ”. Ta có

$$PT \Leftrightarrow 2m = t^2 + t + 2.$$

Xét hàm số



$$f(t) = t^2 + t + 2, \forall t \in [1; 2], f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1; 2]$$

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1; 2]$.

Khi đó phương trình có nghiệm khi $0 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

Vậy $0 \leq m \leq 2$ là các giá trị cần tìm.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m$ có nghiệm $x \geq 1$?

- A. $m \in [3; +\infty)$. B. $m \in [2; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 2]$. D. $m \in (-\infty; 3]$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Với } x \geq 1 \Rightarrow 5^x \geq 5 \Rightarrow \log_2(5^x - 1) \geq \log_2(5 - 1) = 2 \text{ hay } t \geq 2.$$

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: “Tìm m để phương trình có nghiệm $t \geq 2$ ”.

Xét hàm số

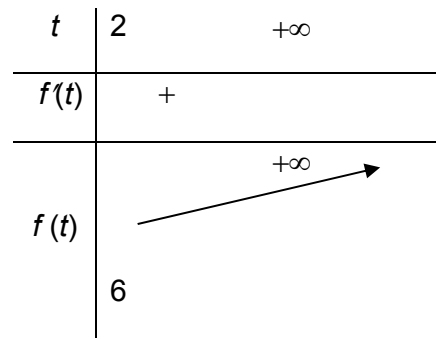
$$f(t) = t^2 + t, \forall t \geq 2, f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 2$$

Suy ra hàm số đồng biến với $t \geq 2$.

Khi đó phương trình có nghiệm khi

$$2m \geq 6 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Vậy $m \geq 3$ là các giá trị cần tìm.



Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 27$?

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_3 x$. Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0.$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(3m-1) = m^2 - 8m + 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 - 2\sqrt{2} \\ m > 4 + 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) ta có: $t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 (x_1 \cdot x_2) = \log_3 27 = 3$.

Theo Vi-ét ta có: $t_1 + t_2 = m + 2 \Rightarrow m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_1 x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3) \text{ có nghiệm thuộc } [32; +\infty) ?$$

A. $m \in (1; \sqrt{3}]$.

B. $m \in [1; \sqrt{3}]$.

C. $m \in [-1; \sqrt{3}]$.

D.

$$m \in (-\sqrt{3}; 1].$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$. Khi đó phương trình tương đương:

$$\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3).$$

Đặt $t = \log_2 x$ với $x \geq 32 \Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 32 = 5$ hay $t \geq 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3)$ (*).

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: “Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \geq 5$ ”

$$\text{Với } t \geq 5 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3) \cdot (t+1)} = m(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{t-3} \cdot (\sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3} = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}$$

Ta có $\frac{t+1}{t-3} = 1 + \frac{4}{t-3}$. Với $t \geq 5 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{4}{t-3} \leq 1 + \frac{4}{5-3} = 3$ hay

$$1 < \frac{t+1}{t-3} \leq 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{t+1}{t-3}} \leq \sqrt{3}$$

suy ra $1 < m \leq \sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1 < m \leq \sqrt{3}$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2 + 1) > \log_5(x^2 + 4x + m) - 1$ (1).

- A. $m \in [-12;13]$. B. $m \in [12;13]$. C. $m \in [-13;12]$. D. $m \in [-13;-12]$.

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 > \frac{x^2 + 4x + m}{5} \\ x^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 4x = f(x) \\ m < 4x^2 - 4x + 5 = g(x) \end{cases}$$

$$\text{Hệ trên thỏa mãn } \forall x \in (2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \text{Max}_{2 < x < 3} f(x) = -12 \text{ khi } x = 2 \\ m \leq \text{Min}_{2 < x < 3} g(x) = 13 \text{ khi } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 13.$$

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \in (2;5]$. B. $m \in (-2;5]$. C. $m \in [2;5]$. D. $m \in [-2;5]$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình tương đương $7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-m)x^2 - 4x + 7-m \geq 0 & (2) \\ mx^2 + 4x + m > 0 & (3) \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $m = 7$: (2) không thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$
- $m = 0$: (3) không thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(1) \text{ thỏa } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-m > 0 \\ \Delta'_2 = 4 - (7-m)^2 \leq 0 \\ m > 0 \\ \Delta'_3 = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \\ m > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5.$$

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ có nghiệm đúng $\forall x$.

- A. $m \in (2; 3]$. B. $m \in (-2; 3]$. C. $m \in [2; 3)$. D. $m \in [-2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình tương đương $7(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)x^2 - 4x + 5-m \geq 0 & (2) \\ mx^2 + 4x + m > 0 & (3) \end{cases} (*), \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $m = 0$ hoặc $m = 5$: (*) không thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$

$$- m \neq 0 \text{ và } m \neq 5 : (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5-m > 0 \\ \Delta'_2 = 4 - (5-m)^2 \leq 0 \\ m > 0 \\ \Delta'_3 = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

---HẾT---