Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số đó.

LỜI GIẢI

• Gọi $\overline{ab}$ là số tự nhiên phải tìm $\Rightarrow a \neq 0$

Do $\overline{ab}$ chẵn nên $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Có 2 trường hợp:

* Nếu $b = 0$ thì $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow$ có 9 cách chọn a.

$\Rightarrow$ có 9 số $\overline{a0}$

* Nếu $b \neq 0$ thì $b \in \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn b. Khi đó có 8 cách chọn a.

$\Rightarrow$ có $4.8 = 32$ số $\overline{ab}$

Vậy tất cả có: $9 + 32 = 41$ số cần tìm.

• Đặt S là tổng của 41 số đó.

$S = (10 + 12 + 14 + \ldots + 96 + 98) - (22 + 44 + 66 + 88)$

$= 45.\dfrac{10+98}{2} - 10.22 = 45.54 - 220 = 2210.$

TÌM ƯỚC SỐ CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

a. Tìm số các ước số dương của số $A = 2^3.3^4.5^7.7^6$.

b. Tìm số các ước số dương của số 490000.

LỜI GIẢI

a . Mỗi ước số dương của A có dạng $U = 2^m.3^n.5^p.7^q$ trong đó m, n, p, q $\in Z$, $0 \le m \le 3, 0 \le n \le 4, 0 \le p \le 7, 0 \le q \le 6$. Do đó : m có 4 cách chọn, n có 5 cách chọn, p có 8 cách chọn, q có 7 cách chọn. Suy ra có $4.5.8.7 = 1120$ ước số dương của A.

b. Vì $B = 490000 = 7^2.10^4 = 2^4.5^4.7^2$. Vì các ước số dương của B có dạng $U = 2^m.5^n.7^p$ trong đó $m, n, p \in Z, 0 \le m \le 4, 0 \le n \le 4, 0 \le p \le 2$. Tương tự câu a, ta suy ra có $5.5.3 = 75$ ước số dương của B.

Số 35280 có bao nhiêu ước số?

LỜI GIẢI

Ta có: $35280 = 2^4.3^2.7^2.5^1$

Do đó các ước số của 35280 phải có dạng $2^x.3^y.7^z.5^t$

Nên:

5 cách chọn số thứ nhất 2^x(vì $x \in \{0,1,2,3,4\}$)

3 cách chọn số thứ hai 3^y (vì $y \in \{0,1,2\}$)

3 cách chọn số thứ ba 7^z (vì $z \in \{0,1,2\}$)

2 cách chọn số thứ tư 5^t (vì $t \in \{0,1\}$)

Vậy ta có: $5 \times 3 \times 3 \times 2 = 90$ ước số của 35280.

Công thức tổng quát tìm ước số dương của một số X

Phân tích X về thừa số nguyên tố giả sử: $X = A^a B^b C^c D^d E^e$ *(A, B, C, D, E là các số nguyên tố). Tổng tất cả các ước số của X là* $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)$

Số A = 1078000 có bao nhiêu ước số?

LỜI GIẢI

Ta có: $1078000 = 11.7^2.2^4.5^3$

Mỗi ước số dương của A có dạng $U = 11^x.7^y.2^z.5^t$ trong đó x, y, z, t $\in Z$ và $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 4, 0 \le t \le 3$. Do đó :

x có 2 cách chọn, y có 3 cách chọn, z có 5 cách chọn, t có 4 cách chọn. Suy ra có $2.3.5.4 = 120$ ước số dương của A.

Có bao nhiêu số tự nhiên X có 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có chữ số 1 và X chia hết cho 2.

LỜI GIẢI

Gọi số cần tìm $\overline{abcde}, (a \ne 0)$

Trường hợp 1: $e = 0$

Bước 1: Chọn 1 trong 4 vị trí $\overline{abcd}$ để xếp chữ số 1, có 4 cách.

Bước 2: Chọn 3 chữ số trong các chữ số {2,3,4,5,6,7,8,9} để xếp vào 3 vị trí còn lại, có A_8^3 cách.

Vậy có 4. A_8^3 số.

Trường hợp 2: $e \in \{2,4,6,8\}$ vậy e có 4 cách chọn.

- Xét $a = 1$: Chọn 3 chữ số trong 8 chữ số còn lại (bỏ 1 số e chọn và chữ số 1), để xếp vào 3 vị trí b,c,d có A_8^3. Vậy có $4.A_8^3$ số.

- Xét $a \neq 1$: Vậy a có 7 cách chọn (bỏ chữ số 1, 0 và 1 số e đã chọn). Chọn 1 trong 3 vị trí b,c,d để xếp chữ số 1, có 3 cách chọn. sau đó chọn 2 chữ số trong 7 chữ số còn lại (bỏ 1 chữ số a đã chọn, và chữ số 1 và một chữ số e đã chọn) để xếp vào 2 vị trí còn lại, có A_7^2 cách. Vậy có $4.7.3.A_7^2$ cách.

Kết luận có $4.A_8^4 + 4.A_8^3 + 4.7.3.A_7^2 = 11592$ số cần tìm.

Cho tập hợp $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. a). Tìm số tập hợp con của A chứa 0 và không chứa 1. b). Tìm các số tự nhiên chẵn có chứa 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A. c). Tìm các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A và chia hết cho 3.

LỜI GIẢI

a). Gọi $B = A \setminus \{0;1\} = \{2;3;4;5;6\}$.

Số tập hợp con của B không có phần tử nào là: $C_5^0 = 1$; Số tập hợp con của B có 1 phần tử là: $C_5^1 = 5$

Số tập hợp con của B có 2 phần tử là: $C_5^2 = 10$; Số tập hợp con của B có 3 phần tử là: $C_5^3 = 10$

Số tập hợp con của B có 4 phần tử là : $C_5^4 = 5$; Số tập hợp con của B có 5 phần tử là: $C_5^5 = 1$

Mỗi tập hợp con của B ta thêm phần tử 0 thì được tập hợp con của A chứa 0 và không chứa 1.

Vậy: Số tập hợp con của A chứa 0 và không chứa 1 là: $1+5+10+10+5+1=32$.

b). Gọi số tự nhiên chẵn có 4 chữ số lấy từ A là: $x = \overline{abcd}.(a,b,c,d \in A)$. Vì x chẵn nên $d \in \{0;2;4;6\}$

. Trường hợp I: d=0: có 1 cách chọn;

Có A_6^3 cách chọn $a,b,c,d \in \{1;2;3;4;5;6\}$ theo thứ tự $\Rightarrow$ số các số chẵn trong TH này là: $1.A_6^3 = 120$ số

.Trường hợp II: $d \neq 0 : d \in \{2;4;6\}$ có 3 cách chọn. Có 5 cách chọn a (vì $a \neq 0$ và $a \neq d$)

Có A_5^2 cách chọn b,c $\in A \setminus \{a;d\}$ theo thứ tự $\Rightarrow$ số các số chẵn trong TH này là: $3.5.A_5^2 = 300$

Vậy: số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau lấy từ A là: 120+300=420 số.

c). Gọi số có 3 chữ số lấy từ A là: $x=\overline{abc}(a,b,c \in A)$. Số có 3 chữ số chia hết cho 3 có tổng 3 chữ số chia hết cho 3. Các tập con 3 phần tử của A có tổng chia hết cho 3 là: $\{0;1;2\};\{0;1;5\};\{0;2;4\};\{0;3;6\};\{0;4;5\}$;

$\{1;2;3\};\{1;2;6\};\{1;3;5\};\{1;5;6\};\{2;3;4\};\{2;4;6\};\{3;4;5\};\{4;5;6\}$

. Xét các tập có chữ số 0: có 5 tập hợp. Số cách chọn a là 2(vì $a \neq 0$) . Số cách chọn b,c là 2!=2 (còn 2 chữ số $\neq 0$)

$\Rightarrow$ số các số có 3 chữ số lấy từ mỗi tập 3 chữ số có chữ số 0 là $2 \times 2 = 4$

$\Rightarrow$ số các số chia hết cho 3 trong TH này là: $5 \times 4 = 20$

. Xét các tập không có chữ số o: có 8 tập hợp. Số các số có 3 chữ số lấy từ tập 3 chữ số không có chữ số 0 là 3!=6

$\Rightarrow$ số các số chia hết cho 3 trong TH này là: $8 \times 6 = 48$

Vậy: số các số có 3 chữ số khác nhau lấy từ A và chia hết cho 3 là: 20+48=68

b.Từ các chữ số 0;1;2;3;4;5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên x, biết rằng x khác 0; x chia hết cho 6 và $x < 3.10^7$ (một số tự nhiên không bắt đầu bằng chữ số 0).

LỜI GIẢI

Ta có $x < 3.10^7$ =30.000.000 nên x có tối đa 8 chữ số. Để dễ đếm, nếu x có chữ số nhỏ hơn 8, ta thêm các chữ số 0 vào bên trái của x cho đủ 8 chữ số, như thế ta xem x là 1 số có 8 chữ số lấy từ 0;1;2;3;4;5.

X chia hết cho 6 nên x là số chẵn và chia hết cho 3.

$x = \overline{a_1a_2a_3...a_7a_8}$. Trước hết ta đếm từ a_1 đến a_6 và a_8 là chữ số chẵn; chừa lại a_7 sẽ đếm sau

Có 3 cách chọn $a_1\left(a_1 < 3\right)$; có 3 cách chọn $a_8\left(a_8 \in \{0;2;4\}\right)$; có 6 cách chọn a_2 …..; có 6 cách chọn a_6

Xét tổng: $a_1 + a_2 + ... + a_6 + a_8$, ta có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $a_1 + a_2 + ... + a_6 + a_8$ chia hết cho 3: chọn a_7 là 0 hay 3: có 2 cách chọn;

Trường hợp 2: $a_1 + a_2 + ... + a_6 + a_8$ chia hết cho 3 dư 1: chọn a_7 là 2 hay 5: có 2 cách chọn;

Trường hợp 3: $a_1 + a_2 + ... + a_6 + a_8$ chia hết cho 3 dư 2: chọn a_7 là 1 hay 4: có 2 cách chọn;

Như vậy a_7 luôn luôn có 2 cách chọn.

Vậy: số các số x chia hết cho 6 và $x < 3.10^7$ là: $3.3.6^5.2 = 139968$ số

Mà: $x \neq 0$ nên số các số x cần tìm là: 139968 -1= 139967 số.