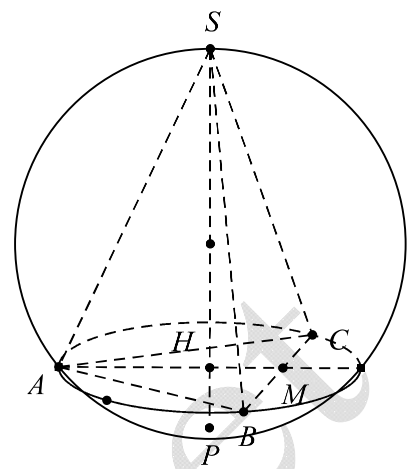


Kẻ $SH \perp (ABC) \Rightarrow HA = HB = HC$ hay $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều

Gọi P là giao của SH với mặt cầu , M là giao của AH và BC thì $MB = MC$ và $SP = 2R, SAP = 90^0$

Đặt $SA = SB = SC = x$, ta có:

$$x^2 = SA^2 = SH.SP \Rightarrow SH = \frac{x^2}{2R}$$

Ta có $MC = x\sin\frac{\alpha}{2}$ nên

$$BC = 2x\sin\frac{\alpha}{2};\ AM = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Mà $SC^2 = SH^2 + HC^2 = SH^2 + \left(\frac{2}{3}AM\right)^2$

Suy ra $x^2 = \frac{x^2}{4R^2} + \frac{4}{3}x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3}R^2\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$

Do vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$

Ap dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta có:

$$8\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\leq \left(\frac{8\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}\right)^3 = 8$$

Do đó $V_{S.ABC} \leq \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$, đẳng thức xảy ra khi $\alpha = 60^0$.

Vậy $\max S_{S.ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$, đạt được khi $\alpha = 60^0$.

Bài 15

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Theo tính chất phương tích của một điểm đối với một đường tròn, ta có

$$GA.GA' = GB.GB' = GC.GC' = GD.GD' = R^2 - OG^2.$$

Với mọi điểm M ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2$$

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ nên suy ra

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Cho $M \equiv O$ thì $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(R^2 - OG^2)$.

Vì thế $4 = \dfrac{4(R^2 - OG^2)}{R^2 - OG^2} = \dfrac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{R^2 - OG^2}$

$$= \frac{GA^2}{GA.GA'} + \frac{GB^2}{GB.GB'} + \frac{GC^2}{GC.GC'} + \frac{GD^2}{GD.GD'} \geq 4\sqrt[4]{\frac{GA}{GA'}.\frac{GB}{GB'}.\frac{GC}{GC'}.\frac{GD}{GD'}}$$

Hay $\dfrac{GA'}{GA}.\dfrac{GB'}{GB}.\dfrac{GC'}{GC}.\dfrac{GD'}{GD} \geq 1 \quad (1).$

Mặt khác, do G là trọng tâm của tứ diện nên

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{GB'C'D'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{V_{ABCD}}$$

$$= \frac{V_{GB'C'D'}}{4V_{GBCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{4V_{GCDA}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{4V_{GDAB}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{4V_{GABC}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{GB'.GC'.GD'}{GB.GC.GD} + \frac{GC'.GD'.GA'}{GC.GD.GA} + \frac{GD'.GA'.GB'}{GD.GA.GB} + \frac{GA'.GB'.GC'}{GA.GB.GC}\right)$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{GA'}{GA}.\frac{GB'}{GB}.\frac{GC'}{GC}.\frac{GD'}{GD}} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $G \equiv O$, hay $ABCD$ là tứ diện gần đều.

2. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

a) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \dfrac{2h^2 + a^2}{4h}$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp $r = \dfrac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}}$.

b)

b1) Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}a^2h.$

Thể tích hình cầu ngoại tiếp $V_1 = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Thể tích hình cầu nội tiếp $V_2 = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Suy ra $\dfrac{V_2}{V} = \dfrac{4\pi r^3}{a^2h} = \dfrac{4\pi\left(\dfrac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}}\right)^3}{a^2h} = \dfrac{4\pi ah^2}{\left(a + \sqrt{4h^2 + a^2}\right)^3}$.

Đặt $\tan\alpha = \dfrac{2h}{a}, \quad (0^0 < \alpha < 90^0)$

Khi đó $\dfrac{V_2}{V} = \dfrac{4\pi(1 - \cos\alpha)\cos\alpha}{4(1 + \cos\alpha)^2} = \dfrac{4\pi(1 - t)t}{(1 + t)^2} = f(t),\ t = \cos\alpha, (0 < t < 1).$

Ta có $f'(t) = \dfrac{4\pi(1 - 3t)}{(1 + t)^3}, f'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\max\dfrac{V_2}{V} = \dfrac{\pi}{2}$, khi $h = \sqrt{2}a.$

b2) Ta có $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{4ah^2}{(2h^2 + a^2)(a + \sqrt{4h^2 + a^2})}$.

Tương tự ta tìm được $\dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất khi $h = a\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + 2}{2}}$.

3. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của mặt cầu tâm I với các cạnh $AD, BD, AC, BC.$

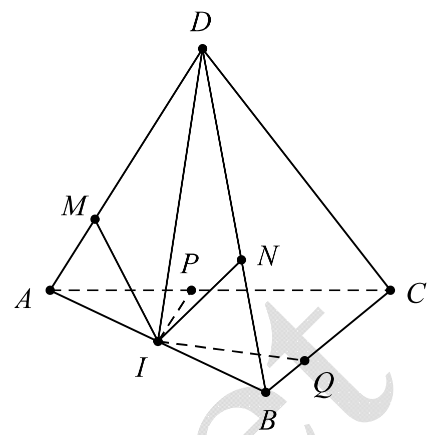
Ta có $BN = BQ, IN = IQ = r_I$ nên

$\Delta IBN = \Delta IBQ$ suy ra $IBN = IBQ$

Tương tự $IAP = IAM$ nên $\Delta CAB = \Delta DAB$. Do đó $AC = AD, BC = BD$ (1).

Tương tự cho mặt cầu tâm J ta có $DA = DB, CA = CB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $CA = CB = DA = DB = a.$



Vì DI là phân giác góc ADB và tam tam giác ADB cân tại D nên I là trung điểm của $AB.$ Cũng như thế, J là trung điểm của $CD.$ Đặt $AB = 2x, CD = 2y.$

Ta có $ID = \sqrt{a^2 - x^2}$ và $S_{DAB} = 2S_{DIB}$ nên

$$AB.ID = 2IN.DB \Leftrightarrow x.\sqrt{a^2 - x^2} = r_I.a \Leftrightarrow r_I = \frac{x.\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Tương tự $r_J = \dfrac{y.\sqrt{a^2 - y^2}}{a}.$

Vậy $CD^2 - 4r_J^2 = 4y^2 - 4\dfrac{y^2.(a^2 - y^2)}{a^2} = 4\dfrac{y^4}{a^2} \Rightarrow a^2(CD^2 - 4r_J^2) = 4CD^4$

$$AB^2 - 4r_I^2 = 4x^2 - 4\frac{x^2.(a^2 - x^2)}{a^2} = 4\frac{x^4}{a^2} \Rightarrow a^2(AB^2 - 4r_I^2) = 4AB^4$$

Do đó $\dfrac{4AB^4}{4CD^4} = \dfrac{a^2(AB^2 - 4r_I^2)}{a^2(CD^2 - 4r_J^2)}$, hay $\dfrac{AB^4}{CD^4} = \dfrac{AB^2 - 4r_I^2}{CD^2 - 4r_J^2}.$

4. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Ta có MN là đường trung bình của tam giác đều nên

$$S_{AMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Thể tích hình chóp $S.AMN$: $V = \dfrac{1}{3}SO.S_{AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Bán kính r mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.AMN$

Ta có: $\sum S = S_{SAM} + S_{SAN} + S_{SMN} + S_{AMN} = \dfrac{14\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{4}$

Mà $V = \dfrac{1}{3} r.\sum S \Rightarrow r = \dfrac{3V}{\sum S} = \dfrac{3}{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$.

5. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)
Ta có O là hình thoi nên O cách đều bốn cạnh của hình thoi.
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên CD và CB thì H, K cũng là hình chiếu của S lên CD, CB.
Gọi I thuộc SO, Gọi E, F lần lượt là hình chiều của I lên SH, SK , ta có IE, IF lần lượt là khoảng cách từ I đến mp(SCD) và mp(SCB).

Ta có $IE = \dfrac{SI.HO}{SH}, IF = \dfrac{SI.KO}{SK}$, do HO=KO và SH=SK nên IE=IF.

Vậy khoảng cách từ I đền các mp(SCD) và (SCB). Chứng minh tương tự ta có I cách đều các mặt bên của hình chóp. Từ đó suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp nằm trên đường cao SO. Gọi I là tâm mặt cầu thì I là chân đường phân giác góc SHO.

Ta có $OH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}, SH = \dfrac{\sqrt{3a^2+4b^2}}{2}$,

$$\frac{IS}{IO} = \frac{HS}{HO} \Rightarrow \frac{IS+IO}{IO} = \frac{HS+HO}{HO} \Rightarrow IO = \frac{HO.SO}{HO+HS} = \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3}a+\sqrt{3a^2+4b^2}}$$

Vậy bán kính $r = \dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3}a+\sqrt{3a^2+4b^2}}$.

6. a) Ta có $AB \perp (CDM) \Rightarrow DM \perp AB$. Khi $DM \perp CM$ thì $DM \perp (ABC)$ nên DM là đường cao của tứ diện. Khi đó tam giác CDM vuông cân tai D nên suy ra $DM = \dfrac{CD}{\sqrt{2}}$.

Ta có $x = AB = 2MB = 2\sqrt{BD^2 - DM^2} = 2\sqrt{CD^2 - \dfrac{CD^2}{2}} = \sqrt{2}CD$.

b) Thể tích tứ diện $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}CD^3$.

Diện tích toàn phần của tứ diện: $\sum S = 2S_{ACD} + 2S_{ABD} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2}CD^2$

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ta có: $r = \dfrac{3V}{\sum S} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}$.

hoc360.net