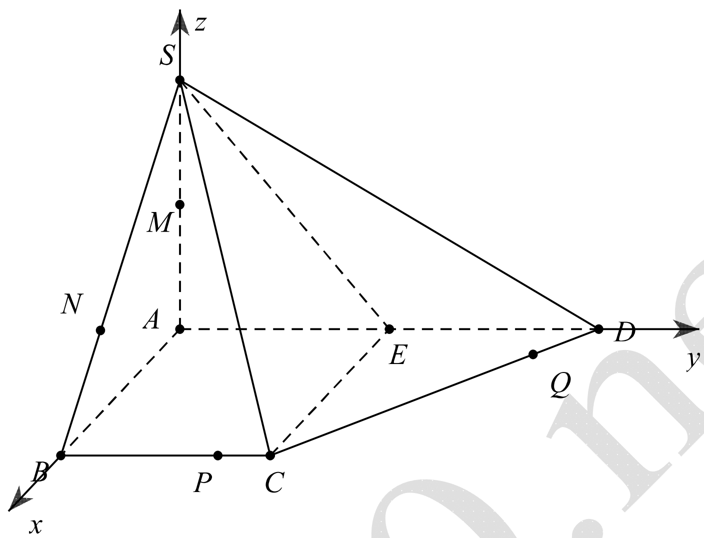
Bài 7



1. Ta có $A\left(0;0;0\right), B\left(a;0;0\right), D\left(0;2a;0\right), C(a;a;0)$.

Đặt $SA = x \Rightarrow S\left(0;0;x\right)$

$\overrightarrow{BD} = \left(-a;2a;0\right), \overrightarrow{SC} = \left(a;a;-x\right) \Rightarrow DB = a\sqrt{5}, SC = \sqrt{x^2+2a^2}; \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{SC} = a^2$

Nên $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BD}\right|}{SC.BD} = \dfrac{a}{\sqrt{5(x^2+2a^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2a^2 = 6a^2 \Leftrightarrow x = 2a \Rightarrow S\left(0;0;2a\right)$.

2. Ta có $\overrightarrow{CS} = \left(-a;-a;2a\right), \overrightarrow{CD} = \left(-a;a;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

Do đó: $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}CS.CD = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{6}.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{3}$

Gọi $\beta = \left((SCD),(SAB)\right)$. Ta có hình chiếu của tam giác SCD lên mặt phẳng

(SAB) là tam giác SAB nên ta suy ra $\cos\beta = \dfrac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta SCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}a.2a}{a^2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Ta có $E\left(0;a;0\right)$. Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SBCE$

Khi đó $\begin{cases} IB^2 = IS^2 \\ IC^2 = IS^2 \\ IE^2 = IS^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 3a \\ -x - y + 2z = a \\ -2y + 4z = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{a}{2} \\ z = a \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}; a\right).$

Bán kính $R = IE = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$

4. Ta có $M(0;0;a)$. Do $\overrightarrow{SN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SB} \Rightarrow N\left(\dfrac{2a}{3}; 0; \dfrac{2a}{3}\right)$,

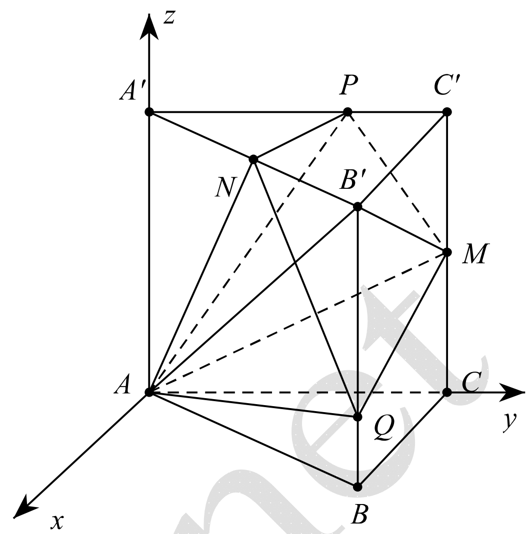
$\overrightarrow{BP} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow P\left(a; \dfrac{3a}{4}; 0\right), \overrightarrow{CQ} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{CD} \Rightarrow Q\left(\dfrac{a}{5}; \dfrac{9a}{5}; 0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{2a}{3}; 0; -\dfrac{a}{3}\right), \overrightarrow{MP} = \left(a; \dfrac{3a}{4}; -a\right), \overrightarrow{MQ} = \left(\dfrac{a}{5}; \dfrac{9a}{5}; -a\right)$

$\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = \left(\dfrac{a^2}{4}; \dfrac{a^2}{3}; \dfrac{a^2}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ} = \dfrac{3a^3}{20} \neq 0$ nên M, N, P, Q không đồng phẳng.

Vậy $V_{MNPQ} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right| = \dfrac{a^3}{40}.$

Bài 8



Đặt $AA' = 2x,\ x > 0$

1. Ta có $A(0;0;0),\ C(0;a;0)$,

$A'(0;0;2x),\ C'(0;a;2x)$

Gọi K là hình chiếu của B lên Oy,

$BK = AB.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$AK = \dfrac{a}{2}$. Nên

$B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right),\ B'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};2x\right)$.

Suy ra $M(0;a;x) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0;a;x),\ \overrightarrow{B'M} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};-x\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = \dfrac{a^2}{2} - x^2$. Mà $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = 0$ nên suy ra $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $A'(0;0;a\sqrt{2})$ và $B'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};a\sqrt{2}\right)$

2. Ta có $\overrightarrow{A'N} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow N\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a}{4};a\sqrt{2}\right)$,

$\overrightarrow{A'P} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'C'} \Rightarrow P\left(0;\dfrac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{B'Q} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{B'B} \Rightarrow Q\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$ và $M\left(0;a;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AN} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a}{4};a\sqrt{2}\right),\ \overrightarrow{AM} = \left(0;a;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{AP} = \left(0;\dfrac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$,

$\overrightarrow{AQ} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right] = \left(0;\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2};-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN} = -\dfrac{5\sqrt{6}}{24}a^3$;

$\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Do đó $V_{A.MPQ} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN}\right| = \dfrac{5\sqrt{6}}{24}a^3;$

$V_{A.MPQ} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}\right| = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{AMPNQ} = V_{A.MPQ} + V_{A.MPQ} = \dfrac{13a^3\sqrt{6}}{24}$.

Bài 9 *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ), với $O \equiv A$, trục Oz chứa AB, trục Ox chứa đường thẳng a, trục $Oy // b$.

Đặt $AB = h$, $AM = a$, và $AN = b$, $(h, a, b > 0)$.

Tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(0;0;h)$, $M(a;0;0)$, $N(0;\ b;h)$.

Vì $MN = AM + BN$ nên $\sqrt{h^2 + a^2 + b^2} = a + b \Leftrightarrow 2a.b = h^2$.

1. Ta có:

$AM.BN = a.b = \dfrac{h^2}{2}$,

$\overrightarrow{AB}(0;0;h)$, $\overrightarrow{AM}(a;\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{AN}(0;b;h) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right] = (0;\ ah;\ 0)$.

Thể tích khối tứ diện $ABMN$ là:

$V_{ABMN} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right| = \dfrac{1}{6}abh = \dfrac{1}{12}h^3$.

Vì $h = AB$ không đổi nên tích $AM.BN$ và thể tích khối tứ diện $ABMN$ là những đại lượng không đổi.

2. Gọi trung điểm của AB là $I\left(0;\ 0;\ \dfrac{h}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MN}(-a;\ b;\ h)$, $\overrightarrow{IM}\left(a;\ 0;\ \dfrac{h}{2}\right)$ nên $\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{IM}\right] = \left(-\dfrac{hb}{2}; \dfrac{ha}{2}; -ab\right)$.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng MN là:

$$d(I,\ MN) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{IM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \sqrt{\dfrac{h^2b^2 + h^2a^2 + 4a^2b^2}{4(a^2 + b^2 + h^2)}} = \sqrt{\dfrac{2ab^3 + 2ba^3 + 4a^2b^2}{4(a^2 + b^2 + h^2)}}$$

$=\sqrt{\frac{ab}{2}}=\frac{h}{2}=\frac{AB}{2}$.

Vậy đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

Bài 10

1. Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0);\ S(0;0;2a),\ B(a;0;0),\ D(0;2a;0)\Rightarrow C(a;2a;0)$$

Do $MD=x\Rightarrow M(x;2a;0)\Rightarrow \overrightarrow{SB}=(a;0;-2a),\ \overrightarrow{SM}=(x;2a;-2a)$

$\Rightarrow S_{\Delta SBM}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SM}\right]\right|=a\sqrt{x^2-2ax+6a^2}$

Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{x^2-2ax+6a^2},\ x\in[0;a]$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-2ax+6a^2}}\le 0\ \forall x\in[0;a]$

$\Rightarrow a\sqrt{5}=f(a)\le f(x)=a\sqrt{6}\Rightarrow a^2\sqrt{5}\le S_{\Delta SBM}\le a^2\sqrt{6}$.

Vậy $\max S_{\Delta SBM}=a^2\sqrt{6}$ có được khi $M\equiv D$

$\min S_{\Delta SBM}=a^2\sqrt{5}$ có được khi $M\equiv C$

2. Ta có:

$\overrightarrow{SC}=(a;2a;-2a)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SM}\right]\overrightarrow{SC}=4a^3+4a^2(a-x)-4a^3=4a^3(a-x)$

$\Rightarrow V_{C.SBM}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\dfrac{2a^2(a-x)}{3}$. Mà

$V_{S.ACBD}=\frac{1}{3}AS.AB.AD=\frac{4a^3}{3}$

$\Rightarrow V_{C.SMB}=\frac{1}{3}V_{S.ABC}\Leftrightarrow\dfrac{2a^2(a-x)}{3}=\dfrac{4a^3}{9}\Leftrightarrow x=\frac{a}{3}$. Vậy $DM=\frac{a}{3}$.

Bài 11

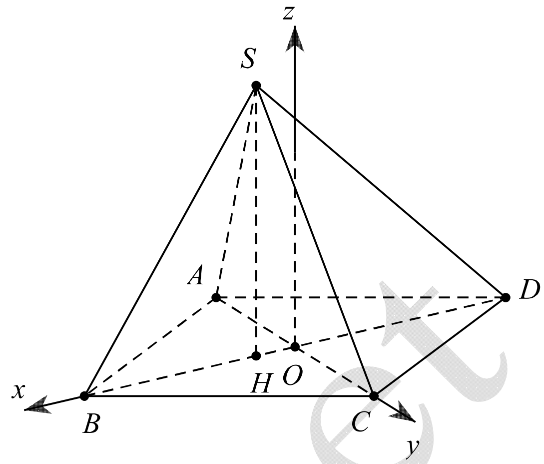
1. Vì $SA=SB=SC$ nên hình chiếu H của S lên mặt phẳng đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $H\in BD$. Chọn hệ trục như hình vẽ

Giả sử $B(b;0;0), C(0;c;0)$ với $b,c>0$.

Khi đó $A(0;-c;0), D(-b;0;0)$ và $b^2+c^2=1$. Gọi $H(h;0;0)$, ta có:

$HB^2 = HA^2 \Rightarrow (h-b)^2 = h^2+c^2$

$\Rightarrow h = \dfrac{b^2-c^2}{2b} = \dfrac{2b^2-1}{2b}$



Ta có: $SH^2 = SA^2 - AH^2 = 1 - \dfrac{1}{4b^2} = \dfrac{4b^2-1}{4b^2} \Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{4b^2-1}}{2b}$, $b > \dfrac{1}{2}$

Do đó $S\left(\dfrac{b^2-c^2}{2b};0;\dfrac{\sqrt{4b^2-1}}{2b}\right)$

Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên ta có $S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO}$, do vậy

$$V_{S.ABCD} = 4V_{SABO} = 4\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}\right| = \frac{2}{3}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}\right|$$

Mà $\overrightarrow{OA} = (0;-c;0), \overrightarrow{OB} = (b;0;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] = (0;0;bc)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS} = \dfrac{1}{2}c\sqrt{4b^2-1}$

Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}c\sqrt{4b^2-1} = \dfrac{1}{6}\sqrt{4c^2(4b^2-1)}$

Ap dụng bđt Cô si ta có: $\sqrt{4c^2(4b^2-1)} \le \dfrac{4c^2+4b^2-1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} c^2+b^2=1 \\ 4c^2 = 4b^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{\sqrt{10}}{4} \\ c = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

Khi đó $SD^2 = \left(\dfrac{b^2-c^2}{2b}+b\right)^2 + \dfrac{4b^2-1}{4b^2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow SD = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\max V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $SD = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\,cm$.

2. Ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ bằng hình lập phương $AB_1CD_1.C_1DA_1B$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.
Tọa độ các điểm

$$A(\sqrt{2};\ 0;0),\ B(0;\sqrt{2};0),\ C(0;0;\sqrt{2}),\ D(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}),\ S\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{SA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{SB}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\overrightarrow{SC}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{SD}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Gọi $\vec{e} = (x;\ y;\ z)$ là véc tơ đơn vị của đường thẳng Δ. Khi đó:

$$SA' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SA}\right|,\ SB' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SB}\right|,\ SC' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SC}\right|,\ SD' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SD}\right|$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên $4P = 4(SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4)$

$$= (-x+y+z)^4 + (x-y+z)^4 + (x+y-z)^4 + (x+y+z)^4$$

$$= 4 + 16(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \le 4 + \frac{16}{3}(x^2+y^2+z^2)^2$$

Hay $P \le \dfrac{7}{3}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\max P = \dfrac{7}{3}$ đạt được khi Δ là các đường thẳng đi qua các đỉnh của tứ diện đều $ABCD$.