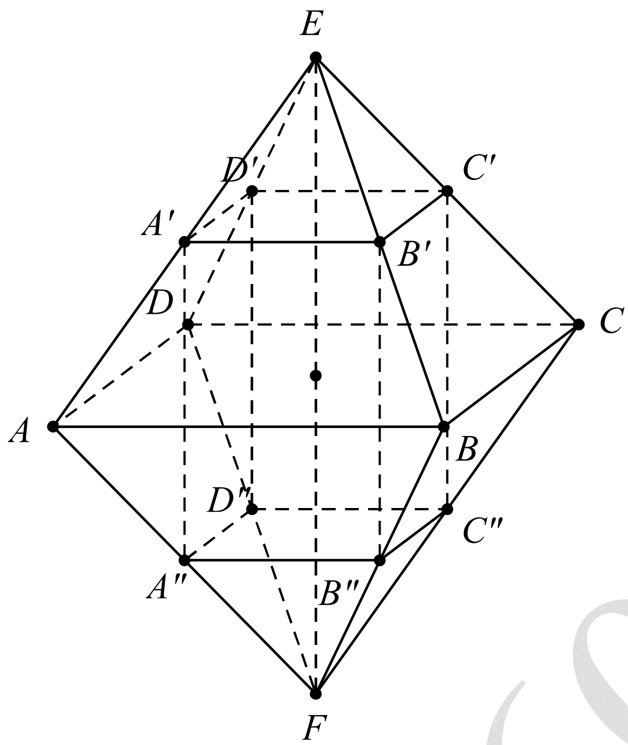


2. a) Gọi Q, M lần lượt là trung điểm của CD, CB; G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt $(ABC),(ACD),(ABC)$ và (BCD)

Gọi a là cạnh của tứ diện, ta có : $G_1G_2 = \frac{2}{3}MQ = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$.

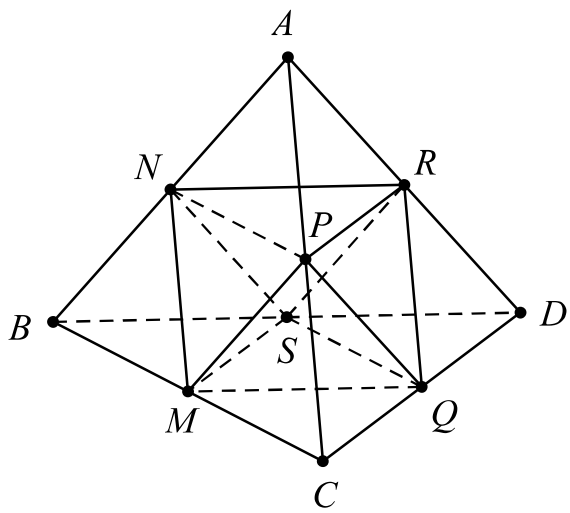
Tương tự $G_1G_4 = G_1G_3 = G_2G_3 = G_2G_4 = G_3G_4 = \frac{a}{3}$.

Từ đó suy ra $G_1G_2G_3G_4$ là một tứ diện đều cạnh $\frac{a}{3}$.

b) Gọi N, P, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB, AC, BD.

Ta có: $QM = QN = QS = QR = PM = PN = PS = PR = \frac{a}{2}$.

Vậy $MRNSQP$ là hình bát diện đều.



3. a) Vì $AE = AF = BE = BF = CE = CF = DE = DF$ nên A, B, C, D nằm trên mặt phẳng trung trực của EF.
b) Vì $(ABCD)$ là mặt phẳng trung trực của EF nên

$EF \perp (ABCD) \Rightarrow (ECFA) \perp (ABCD)$ (Vì $EF \subset (CEAF)$).

4. Xét khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a. Gọi $O, M, N, P, Q, M', N', P', Q'$ lần là tâm các mặt $ABCD, EAD, EAB, EBC, ECD, FAD, FAB, FBC, FCD.$
Ta chứng minh được AC, BD, EF đôi một vuông góc tại O.

Ta có $MM'//EF$ và $MM' = \frac{1}{3}EF = \frac{1}{3}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}a}{3}$, tương tự

NN', PP', QQ' cũng song song với E và bằng $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. Vậy

$MNPQ.M'N'P'Q'$ là hình hộp.
Mặt khác MN, MQ, MM' lần lượt song song với BD, AC, EF nên chúng

đôi một vuông góc, lại có $MN = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ do đó $MNPQ.M'N'P'Q'$

là hình lập phương.
5. Xét hình lập phương cạnh a.
Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các mặt $ABB'A', ADD'A', DCC'D',$

$BCC'B', ABCD, A'B'C'D'$. Ta có $EM = EN = EP = EQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$FM = FN = FP = FQ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $MNPQEF$ là bát diện đều cạnh $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

6. Ghép hai khối tứ diện đều bằng nhau (một mặt của tứ diện này ghép vào một mặt của tứ diện kia, hai đỉnh không thuộc hai mặt đó nằm khác phía so với chính mặt phẳng ghép) ta được khối đa diện có 6 mặt là 6 tam giác đều. Cứ làm như vậy, nếu ghép $n-1$ khối tứ diện đều ta sẽ được khối đa diện có $2n$ mặt đều. Do đó tồn tại một khối đa diện có 20 mặt là tam giác đều nhưng không phải là khối hai mươi mặt đều.

Bài 5

1.

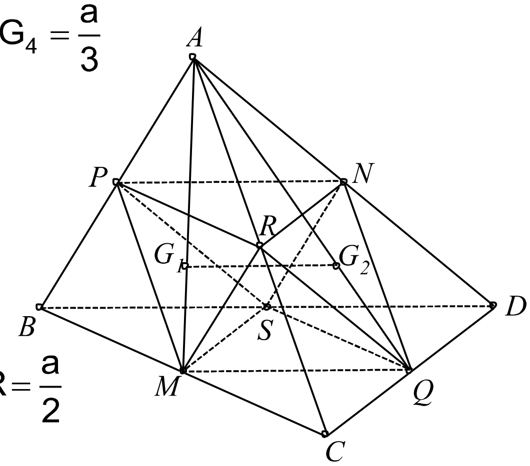
a) Gọi Q, M lần lượt là trung điểm của CD, CB; G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt $(ABC), (ACD), (ABD)$ và (BCD).

Gọi a là cạnh của tứ diện, ta có

$G_1G_2 = \dfrac{2}{3}MQ = \dfrac{2}{3}\dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{3}$.

Tương tự $G_1G_4 = G_1G_3 = G_2G_3 = G_2G_4 = G_3G_4 = \dfrac{a}{3}$

nên $G_1G_2G_3G_4$ là một tứ diện đều cạnh $\dfrac{a}{3}$.



b) Gọi N, P, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB, AC, BD.

Theo tính chất đường trung bình, ta có

$QM = QN = QS = QR = PM = PN = PS = PR = \dfrac{a}{2}$

Vậy $MRNSQP$ là hình bát diện đều.

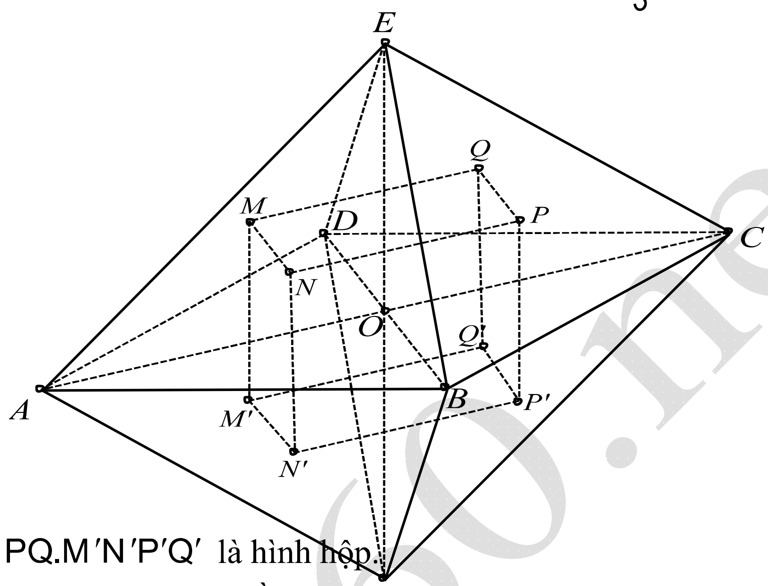
2. Xét khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a.

Gọi $O, M, N, P, Q, M', N', P', Q'$ lần là tâm của các mặt $ABCD, EAD, EAB, EBC, ECD, FAD, FAB, FBC, FCD$.

Vì các đỉnh A, B, C, D cách đều E, F nên cùng thuộc một mặt phẳng, do đó $ABCD$ là hình thoi. Mà E cách đều A, B, C, D nên $ABCD$ là hình vuông, do đó

AC, BD đôi một vuông góc. Từ đó AC, BD, EF đôi một vuông góc tại O. Ta có $MM'//EF$ và $MM' = \frac{1}{3}EF = \frac{\sqrt{2}a}{3}$.

Tương tự NN', PP', QQ' cũng song song với E và bằng $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.



Vậy $MNPQ.M'N'P'Q'$ là hình hộp.

Mặt khác MN, MQ, MM' lần lượt song song với BD, AC, EF nên chúng đôi một vuông góc, lại có $MN = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ do đó $MNPQ.M'N'P'Q'$ là hình lập phương.