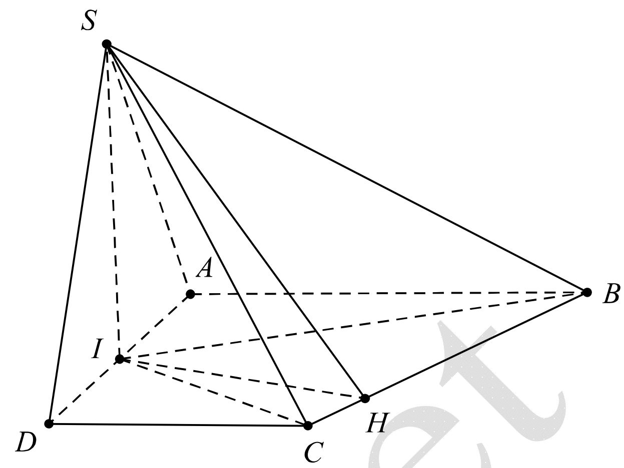
phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ hay là $SI \perp (ABCD)$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI.S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD(AB + CD)}{2} = 3a^2$$



Gọi H là hình chiếu của I xuống $BC \Rightarrow BC \perp (SIH) \Rightarrow SHI = \left((SBC),(ABCD)\right) = 60^0$.

Ta có: $BC = \sqrt{AD^2 + (AB - DC)^2} = a\sqrt{5}$; $S_{\Delta IDC} = \frac{a^2}{2}$; $S_{\Delta AIB} = a^2$.

$$\Rightarrow S_{\Delta BCI} = S_{ABCD} - (S_{\Delta IDC} - S_{\Delta ABI}) = \frac{3}{2}a^2$$

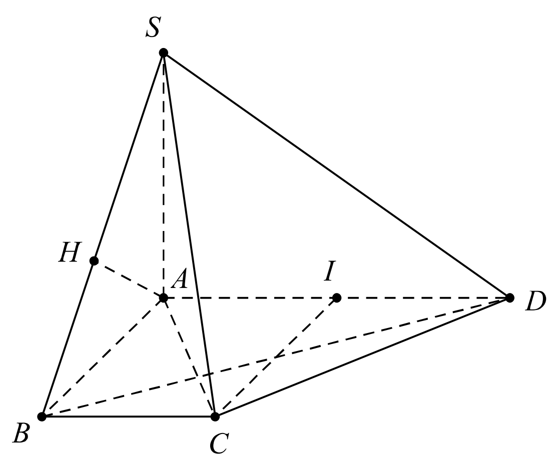
$$\Rightarrow IH = \frac{2S_{\Delta IBC}}{BC} = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SI = IH.\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI.S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

3. Gọi I là trung điểm của AD.

Ta có $CI = IA = ID = \frac{AD}{2}$ suy ra ΔACD vuông tại C $\Rightarrow CD \perp AC$. Mà $SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SA \perp CD$ nên ta có $CD \perp SD$ hay ΔSCD vuông.

Gọi $d_1; d_2$ lần lượt là khoảng cách từ B, H đến $mp(SCD)$



Ta có: $\Delta SAB \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SA}{SH} = \frac{SB}{SA} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$ mà

$\frac{SH}{SB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$.

Thể tích khối tứ diện $S.BCD$: $V_{SBCD} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a, CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a$

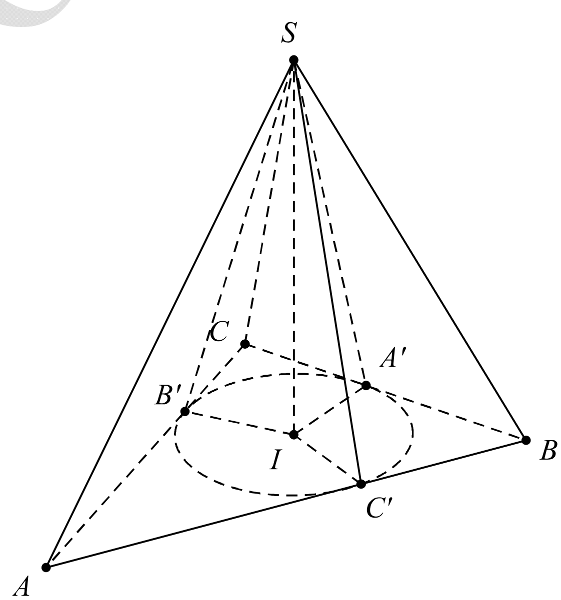
$\Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \sqrt{2}a^2$.

Ta có: $V_{SBCD} = \frac{1}{3}d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \frac{3.\frac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \frac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến $mp(SCD)$ là $d_1 = \frac{a}{3}$.

Bài 13

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC), A', B', C' lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB.



Từ giả thiết suy ra $SA'I = SB'I = SC'I = 60^0$.

Các tam giác vuông SIA', SIB', SIC' bằng nhau nên $IA' = IB' = IC' \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Gọi p là nửa chu vi tam giác $ABC \Rightarrow p = \frac{5a + 6a + 7a}{2} = 9a$

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - BC)(p - AC)(p - AB)}$

$= \sqrt{9a(9a - 6a)(9a - 7a)(9a - 5a)} = 6\sqrt{6}a^2$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có :

$$S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{6\sqrt{6}a^2}{9a} = \frac{2\sqrt{6}a}{3} \Rightarrow IA' = r = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$$

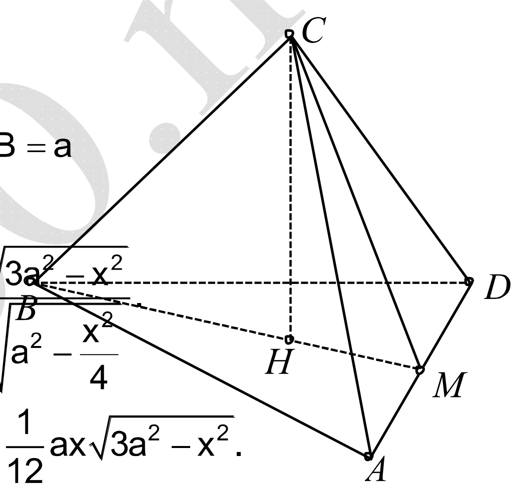
Ta có: $SI = IA'\tan 60^0 = \frac{2\sqrt{6}a}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{2}a$

Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SI.S_{ABC} = \frac{1}{3}2\sqrt{2}a.6\sqrt{6}a = 8\sqrt{3}a^3$.

Bài 14

1. Ta có: $CA = CB = CD = DA = BD = a$ nên hình chiếu H của C lên mặt phẳng (ABD) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân BAD, hay H thuộc trung tuyến BM. Diện tích tam giác BAD

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}BM.AD = \frac{1}{2}x.\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$



Tam giác MCB có $MC = MB = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}, CB = a$

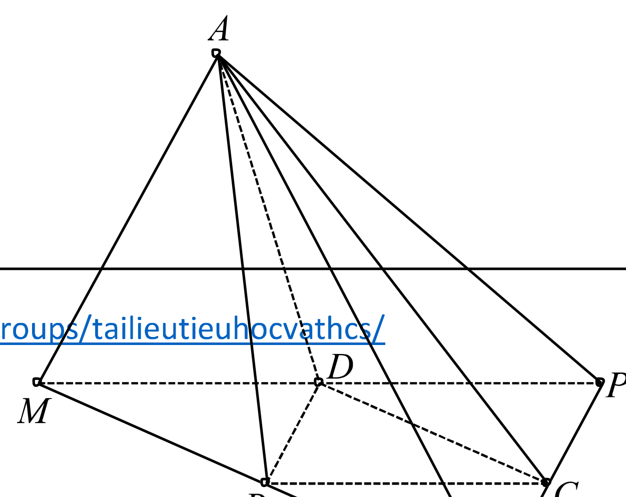
nên $CH = \dfrac{\sqrt{MB^2 - \frac{BC^2}{4}}.BC}{MB}$, hay $CH = \dfrac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{2\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}}$

Vậy thể tích khối tứ diện là $V = \frac{1}{3}CH.S_{ABD} = \frac{1}{12}ax\sqrt{3a^2 - x^2}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x\sqrt{3a^2 - x^2} \le \frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} = \frac{3a^2}{2}$, nên $V \le \frac{a^3}{8}$. Dấu đẳng thức có khi $x^2 = 3a^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

Vậy thể tích khối tứ diện lớn nhất là $\frac{a^3}{8}$, đạt được khi $x = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

2. Trong mặt phẳng (DBC), dựng các đường thẳng qua các đỉnh và song song với cạnh còn lại của tam giác BCD, chúng cắt nhau tại M, N, P. Khi đó B, C, D lần lượt là trung điểm của các đoạn cạnh MN, NP, PM.



Ta có $S_{MNP} = 4S_{BCD}$ nên

$V_{AMNP} = 4V_{ABCD}$.

Vì $AD = BC$ và BC là đường trung bình của tam giác NMP nên

$$AD = DM = DP$$

Suy ra tam giác AMP là tam giác vuông tại A.

Tương tự cũng có các tam giác APN, ANM đều vuông tại A.

Vì thế $V_{AMNP} = \frac{1}{6}AM.AN.AP$. Đặt $AM = x, AN = y, AP = z$.

Chú ý $MN^2 = 4DC^2 = 4a^2$, nên áp dụng định lý Pitago cho các tam giác AMP, APN, ANM ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ y^2 + z^2 = 4b^2 \\ z^2 + x^2 = 4c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ y^2 + z^2 = 4b^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2(a^2 - b^2 + c^2), y^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2), z^2 = 2(-a^2 + b^2 + c^2)$$

Vậy $V_{AMNP} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}$, nên

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Để ý rằng $(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = a^4 - (b^2 - c^2)^2 \le a^4$ và hai bất đẳng thức tương tự khác, ta có

$$\left[(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)\right]^2 \le a^4b^4c^4$$

Hay $V_{ABCD} \le \frac{\sqrt{2}}{12}abc$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, hay tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều.

3. Trong mặt phẳng (DBC), dựng các đường thẳng qua các đỉnh và song song với cạnh còn lại của tam giác BCD chúng cắt nhau tại M, N, P. Khi đó B, C, D lần lượt là trung điểm của các đoạn cạnh MN, NP, PM.

Ta có $S_{\Delta MNP} = 4S_{\Delta BCD}$ nên $V_{AMNP} = 4V_{ABCD}$.

Vì $AD = BC$ và BC là đường trung bình của ΔNMP nên:

$AD = DM = DP$

Suy ra tam giác AMP là tam giác vuông tại A.

Tương tự cũng có các tam giác APN, ANM đều vuông tại A.

Vì thế $V_{AMNP} = \frac{1}{6} AM.AN.AP$. Đặt $AM = x, AN = y, AP = z$.

Chú ý $MN^2 = 4DC^2 = 4a^2$, nên áp dụng định lý Pitago cho các tam giác AMP, APN, ANM ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ y^2 + z^2 = 4b^2 \\ z^2 + x^2 = 4c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ y^2 + z^2 = 4b^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

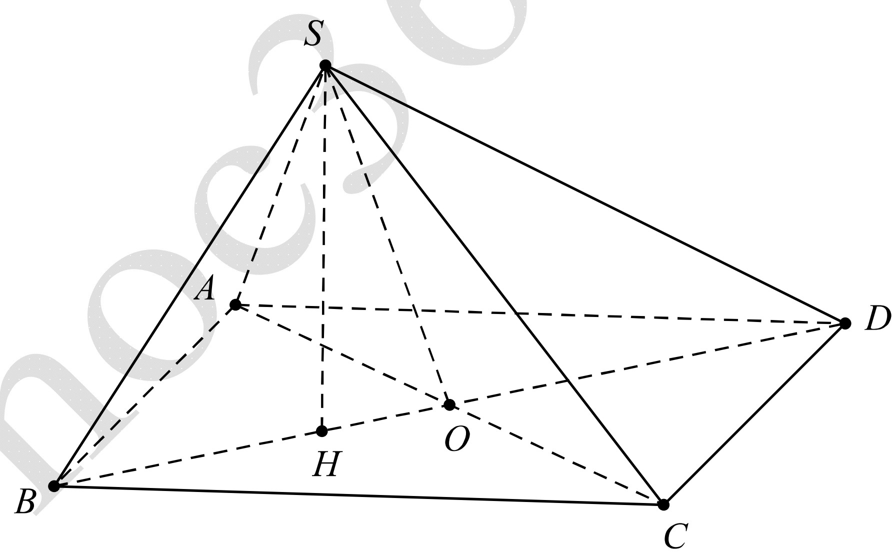
$\Rightarrow x^2 = 2(a^2 - b^2 + c^2), y^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2), z^2 = 2(-a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy $V_{AMNP} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}$, nên

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Bài 15

1.



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy, ta suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên H thuộc BD.

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow O = BD \cap AC$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBD), mà $AS = AB = AD = a \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $SBD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S. Đặt $SD = x$

Ta có: $SH.BD = SB.SD \Rightarrow SH = \dfrac{SB.SD}{BD}$ và $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$

Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{SB.SD}{BD}.\dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{3}AB.SD.OA$

Mà $OA^2 = AB^2 - \dfrac{BD^2}{4} = a^2 - \dfrac{a^2 + x^2}{4} = \dfrac{3a^2 - x^2}{4}$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{6}.a.x.\sqrt{3a^2 - x^2}$

Ap dụng bđt Cô si ta có: $x\sqrt{3a^2 - x^2} \le \dfrac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

Suy ra: $V_{S.ABCD} \le \dfrac{1}{6}.a.\dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3}{4}$. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

2. Áp dụng định lí hàm số cô sin cho tam giác SAB ta có:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\alpha = 2a^2\left(1 - \cos\alpha\right) = 4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$\Rightarrow AB = 2a\cos\dfrac{\alpha}{2}$

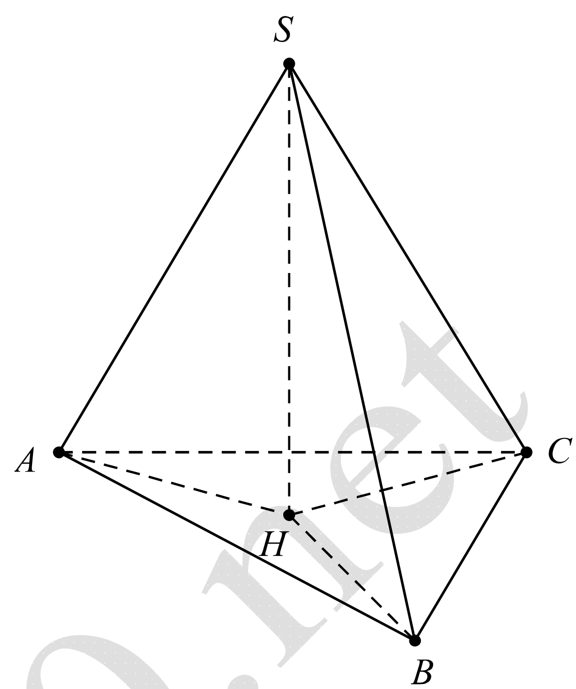
$BC = 2a\cos\dfrac{\beta}{2},\ CA = 2a\cos\dfrac{\gamma}{2}$

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy (ABC), ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$AH = \dfrac{AB.BC.CA}{4S},\ S = S_{\Delta ABC}$

suy ra : $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2}$

$= \dfrac{\sqrt{16a^2S^2 - (AB.BC.CA)^2}}{4S}$



Do đó:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}\sqrt{16a^2S^2 - 64a^6\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, ta có: $p = a\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\beta}{2} + \cos\dfrac{\gamma}{2}\right)$

Nên $S^2 = p(p - AB)(p - BC)(p - CA)$

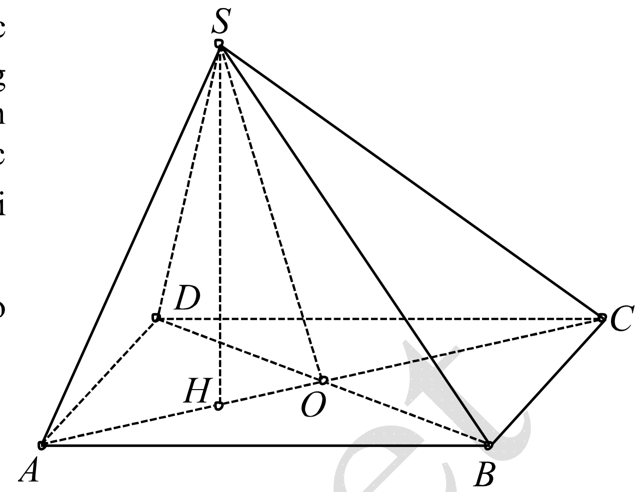
$$= a^4\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right]\left[\cos^2\frac{\gamma}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right]$$

(*)

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{a^3k}{3}$ với

$$k = \sqrt{\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right]\left[\cos^2\frac{\gamma}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right] - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

3. Vì $SA = SB = SD$ nên hình chiếu H của điểm S lên mặt phẳng đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Mà tứ giác $ABCD$ có các cạnh bằng nhau nên đó là một hình thoi, do đó $H \in AO$.



Ba tam giác SBD, ABD, CBD có các cạnh tương ứng bằng nhau nên bằng nhau, do đó các trung tuyến SO, AO, CO bằng nhau, suy ra tam giác SAC vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Tam giác vuông SAC có đường cao SH nên $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SC^2}$

$\Rightarrow SH = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Ta có $OB^2 + OA^2 = AB^2$ nên

$$OB^2 = AB^2 - \frac{AC^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}.$$

Diện tích đáy của khối chóp $S_{ABCD} = AC.OB = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + x^2)(3a^2 - x^2)}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{6}.ax\sqrt{3a^2 - x^2}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$36V^2 = a^2x^2(3a^2 - x^2) \le a^2\left[\frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2}\right]^2$$

$$\Rightarrow 36V^2 \le \frac{9a^6}{4} \Rightarrow V^2 \le \frac{a^6}{16} \Rightarrow V \le \frac{a^3}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.