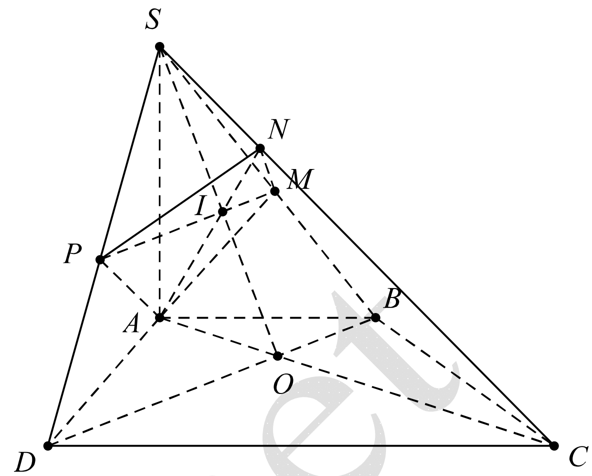


Chiều cao của hình thang là y thì: $y = BC.\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích của hình thang:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).y = \frac{27\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{9\sqrt{3}}{4}x$.

Ta có $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{1}{3}$, $S_{ACD} = 2S_{ACB} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$, do đó

$$V = V_{S.ABCD} = 3V_{S.ACB} = \frac{3}{2}V_{S.ACD}.$$

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ANM}}{V} + \frac{V_{S.ANP}}{V} = \frac{V_{S.ANM}}{3V_{S.ACB}} + \frac{2V_{S.ANP}}{3V_{S.ACD}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{SN}{SC}.\frac{SM}{SB} + 2\frac{SN}{SC}.\frac{SP}{SD}\right) = \frac{1}{3}.\frac{SN}{SC}\left(\frac{SM}{SB} + 2\frac{SP}{SD}\right).$$

Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = SO \cap AN$. Mặt phẳng (α) song song với BD nên M, P là giao của đường thẳng qua I, song song với BD và các cạnh SB, SD.

Do đó : $\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{SI}{SO}$. Đặt $\frac{NS}{NC} = b \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{b}{b+1}$.

Xét tam giác SOC và đường thẳng AN ta có $\frac{AO}{AC}.\frac{NC}{NS}.\frac{IS}{IO} = 1$, do đó

$\frac{IS}{IO} = 3b \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{3b}{3b+1} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{3b}{3b+1}$.

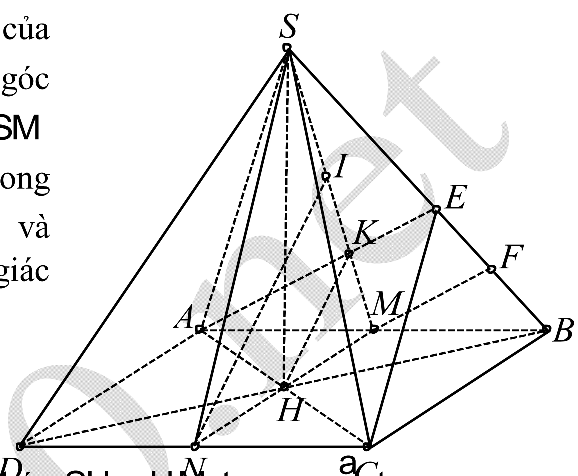
Vậy $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3}.\frac{b}{b+1}\left(\frac{3b}{3b+1} + 2.\frac{3b}{3b+1}\right) = \frac{3b^2}{(b+1)(3b+1)}$.

Với $\frac{NS}{NC} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$ nên $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.AMNP} = \frac{9\sqrt{3}}{32}x$.

b) Mặt phẳng (α) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau khi

$\dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{2}$, hay $\dfrac{3b^2}{(b+1)(3b+1)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3b^2-4b-1=0.$ Giải ra và kết hợp với điều kiện ta có $b=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$, hay $\dfrac{NS}{NC}=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ và điểm N nằm trên cạnh SC.

2. Gọi M,N,H lần lượt là trung điểm của AB,CD,BD. Mặt phẳng (SMN) vuông góc với $AB\Rightarrow(SMN)\perp(SAB)$. Hạ $NJ\perp SM$ thì $NJ\perp(SAB)$, nên (α) chứa AC và song song với NJ. Kẻ $HK\perp SM$ và $AK\cap SB=E$ thì thiết diện là tam giác ACE.



Gọi $V=V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}$,
$V_1=V_{ABCE},V_2=V-V_1$.

Ta có $SMH=\varphi$ nên chiều cao của khối chóp $SH=HM.\tan\varphi=\dfrac{a}{2}.\tan\varphi$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{6}a^3.\tan\varphi$.

Để tính V_1,V_2 ta tính tỉ số giữa $\dfrac{V_1}{V}$. Ta có $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{V_1}{2V_{S.ABC}}=\dfrac{BE}{2BS}$.

Kẻ $MF\,//\,AE$, ta có

$$\frac{EB}{ES}=\frac{EB}{EF}.\frac{EF}{ES}=\frac{AB}{AM}.\frac{KM}{KS}=2.\frac{HK.\cot\varphi}{HK.\tan\varphi}=\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$\Rightarrow\frac{BE}{BS}=\frac{2\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}\Rightarrow V_1=\frac{\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}V.$$

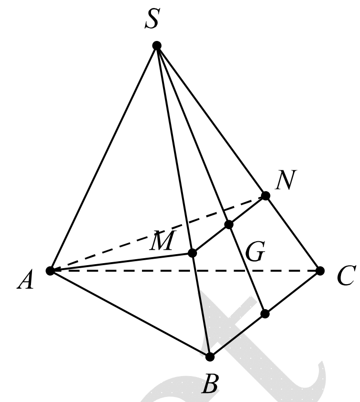
Vì thế $V_1=\dfrac{a^3\sin 2\varphi}{3(1+\cos^2\varphi)},V_2=V-V_1=\dfrac{a^3\sin\varphi}{6\cos\varphi(1+\cos^2\varphi)}$.

Bài 13

Đặt $x=\dfrac{SM}{SB}$, $y=\dfrac{SN}{SC}$ $\left(0\le x,y\le 1\right)$. Ta có: $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{SM.SN}{SA.SB}=xy$

$$\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{S_{\Delta SMG}+S_{\Delta SNG}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{S_{\Delta SMG}}{2S_{\Delta SBE}}+\frac{S_{\Delta SNG}}{2S_{\Delta SCE}}=\frac{SM.SG}{2SB.SE}+\frac{SN.SG}{2SC.SE}$$

$= \frac{1}{3}(x+y)$ (1)



Lại có: $\frac{S_{\Delta SMN}}{S\Delta SBC} = \frac{SM.SN}{SA.SB} = xy$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$xy = \frac{1}{3}(x+y) \Leftrightarrow (3x-1)y = x$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{3x-1} \quad \left(x \neq \frac{1}{3}\right).$

Vậy $\frac{V_1}{V} = xy = \frac{x^2}{3x-1} = f(x)$.

Từ $\begin{cases} 0 \le x; y \le 1 \\ x+y = 3xy \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 1$. Xét $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}, x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

Ta tìm được $\max\limits_{[\frac{1}{2};1]} f(x) = \frac{1}{2}$ khi $x = \frac{1}{2} \cup x = 1$; $\min\limits_{[\frac{1}{2};1]} f(x) = \frac{4}{9}$ khi $x = \frac{2}{3}$.

Vậy $\min \frac{V_1}{V} = \frac{4}{9}; \max \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}$.