Nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 0 \\ 3 - 4y = 0 \\ 5 - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = \frac{3}{4}, z = \frac{5}{4}$. Suy ra $I\left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$

Khi đó: $2\overrightarrow{NA}^2 = 2\left(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = 2NI^2 + 2IA^2 + 4\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IA}$

$$\overrightarrow{NB}^2 = NI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IB};\ \overrightarrow{NC}^2 = NI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IC}$$

Do đó

$$S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$$

Do $2IA^2 + IB^2 + IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi NI nhỏ nhất hay N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Gọi $N(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = \left(x; y - \frac{3}{4}; z - \frac{5}{4}\right)$, $\vec{n} = (1; -1; 1)$ là VTPT của (P)

Vì $N \in (P) \Rightarrow x - y + z + 1 = 0$ (1)

Do $IN \perp (P)$ nên $\overrightarrow{IN} = k\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \frac{3}{4} + k \\ z = \frac{5}{4} + k \end{cases}$ thay vào (1), ta có được:

$$k - \left(\frac{3}{4} + k\right) + \left(\frac{5}{4} + k\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$$

Vậy $N\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

Ví dụ 11.8 Trong không gian cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; -3)$, $C(2; -3; -1)$

1. Tìm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho biểu thức sau nhỏ nhất $S = 3MA^2 + 4MB^2 - 6MC^2$;

2. Tìm M thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ sao cho biểu thức sau lớn nhất: $P = \left|\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\right|$;

3. Tìm M thuộc mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=36$ sao cho biểu thức $F=MA^2-4MB^2+2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Cách 1:

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=6\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA}=(1-x;2-y;3-z), 6\overrightarrow{AC}=(6;-30;-24), 4\overrightarrow{AB}=(-8;-8;-24)$

Do đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=6+8\\2-y=-30+8\\3-z=-24+24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-13\\y=24\\z=3\end{cases}\Rightarrow I(-13;24;3)$

Khi đó:

$$S=3\overrightarrow{MA}^2+4\overrightarrow{MB}^2-6\overrightarrow{MC}^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-6\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$=IM^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+4IB^2-6IC^2$$

$$=IM^2+3IA^2+4IB^2-6IC^2.$$

Do $3IA^2+4IB^2-6IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình

chiếu của I lên (α). Ta có $IM\perp(\alpha)\Rightarrow IM:\begin{cases}x=-13+2t\\y=24+t\\z=3-2t\end{cases}$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=-13+2t\\y=24+t\\z=3-2t\\2x+y-2z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-11\\y=25\\z=1\end{cases}$

Vậy $M(-11;25;1)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $M(a;b;c)\in(\alpha)\Rightarrow 2a+b-2c-1=0$

Suy ra: $3MA^2=3a^2+3b^2+3c^2-6a-12b-18c+42$

$$4MB^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8a + 24c + 40$$

$$6MC^2 = 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 - 24a + 36b + 12c + 84$$

Suy ra $S = a^2 + b^2 + c^2 + 26a - 48b - 6c - 2$

$$= (a+11)^2 + (b-25)^2 + (c-1)^2 + 4a + 2b - 4c - 749$$

$\geq 2(2a + b - 2c - 1) - 747 \geq -747$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = -11, b = 25, c = 1$ hay $M(-11;25;1)$ là điểm cần tìm

2. Cách 1: Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn:

$$\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{IA} = \left(1 - x; 2 - y; 3 - z\right)$, $-7\overrightarrow{AB} = (14;14;42)$, $5\overrightarrow{AC} = (5;-25;-20)$

Nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 14 + 5 \\ 2 - y = 14 - 25 \\ 3 - z = 42 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18 \\ y = 13 \\ z = -19 \end{cases} \Rightarrow I(-18;13;-19)$

Khi đó: $P = \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 7\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) + 5\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)\right| = MI$

Do đó P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên Δ

$M \in \Delta \Rightarrow M\left(1 + 2t; -1 + 3t; 1 - t\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2t + 19; 3t - 14; -t + 20)$

Vì $IM \perp \Delta \Rightarrow 2(2t + 19) + 3(3t - 14) - (-t + 20) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{12}{7}$

Vậy $M\left(\dfrac{31}{7}; \dfrac{29}{7}; -\dfrac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M\left(1 + 2t; -1 + 3t; 1 - t\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MA} = \left(-2t; 3 - 3t; 2 + t\right)$, $-7\overrightarrow{MB} = \left(14 + 14t; -7 + 21t; 28 - 7t\right)$

$$5\overrightarrow{MC} = \left(5 - 10t; -10 - 15t; -10 + 5t\right)$$

Do đó $\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = \left(2t + 19; 3t - 14; -t + 20\right)$

Nên $P^2 = (2t+19)^2 + (3t-14)^2 + (t-20)^2 = 14t^2 - 48t + 957$

$= 14\left(t - \dfrac{12}{7}\right)^2 + \dfrac{6411}{7} \geq \dfrac{6411}{7}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = \dfrac{12}{7}$. Vậy $M\left(\dfrac{31}{7}; \dfrac{29}{7}; -\dfrac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

3. Gọi $E(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn:

$\overrightarrow{EA} - 4\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

Ta tìm được $E(10; -2; 16)$.

Khi đó $F = -EM^2 + EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$

Vì $EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên F lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi EM nhỏ nhất, lớn nhất.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 8)$, $\overrightarrow{IE} = (8; -4; 8) \Rightarrow IE: \begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 2 - 4t \\ z = 8 + 8t \end{cases}$

Tọa độ các giao điểm của IE với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 2 - 4t \\ z = 8 + 8t \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow 8^2t^2 + 4^2t^2 + 8^2t^2 = 36 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{2}.$$

- $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M(6; 0; 12) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2; -2; 4) \Rightarrow MI = 2\sqrt{6}$
- $t = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow N(-2; 4; 4) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (-4; 2; 4) \Rightarrow NI = 6$

Do $NI > MI$ nên ta có được:

- F lớn nhất khi và chỉ khi $E \equiv M \Rightarrow E(6; 0; 12)$
- F nhỏ nhất khi và chỉ khi $E \equiv N \Rightarrow E(-2; 4; 4)$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 1 Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;-2;0)$, $C(1;2;-2)$.

1. Lập phương trình mặt phẳng (ABC);

2. Tìm a,b để mặt phẳng $(\alpha):(2a+b)x+(3a+2b)y-1z+1=0$ song song với (ABC);

3. Tìm $M\in(\beta):3x+y-z+1=0$ sao cho $S=2MA^2+4MB^2-3MC^2$ nhỏ nhất;

4. Tìm $N\in(\gamma):3x+3y-z-29=0$ sao cho $P=\left|3\overrightarrow{NA}-5\overrightarrow{NB}+7\overrightarrow{NA}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 2 Cho các điểm $A(-2;3;1)$, $B(5;-2;7)$, $C(1;8;-1)$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn

1. $MA^2+MB^2=MC^2$ **2**. $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right|$

Bài 3 Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;\ 4;\ 5)$, $B(0;\ 3;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 0)$ và mặt phẳng $(P):\ 3x-3y-2z-15=0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

1. $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

2. $MA^2+2MB^2-4MC^2$ có giá trị lớn nhất.

Bài 4 Cho $A(1;\ 4;\ 2), B(-1;\ 2;\ 4)$ và $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

1. MA^2+MB^2 nhỏ nhất

2. $\left|3\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}\right|$ nhỏ nhất.

3. Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất.

Bài 5 Cho tam giác ABC có $A(3;-2;5)$, $B(-2;1;-3)$, $C(5;1;-1)$. Điểm M có các thành phần tọa độ bằng nhau.

1. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác nhọn.

2. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{BC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Tìm điểm M sao cho $2MA^2 + MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6. Cho ba điểm $A(1;2;-3), B(2;4;5), C(3;6;7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

1. Tìm tọa độ hình chiếu trọng tâm G của tam giác ABC trên mặt phẳng (P).

2. Tìm tọa độ điểm G' đối xứng với điểm G qua mặt phẳng (P).

3. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức T có giá trị nhỏ nhất với $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Bài 7.

1. Cho các điểm $A(1;\ 0;\ -1), B(0;\ 2;\ 3),\ C(-1;\ 1;\ 1)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

a) $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ lớn nhất.

b) $\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 8. Cho đường thẳng $\Delta_m : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = (1-m)t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ z = -2 + mt \end{cases}$ m là tham số.

Tìm giá trị của m sao cho

1. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ_m là lớn nhất, nhỏ nhất.

2. Δ_m tạo với mặt phẳng (xOy) một góc lớn nhất.

3. Khoảng cách giữa Δ_m và trục Oy lớn nhất.