Câu 38. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

A. $m=\pm 1$.

B. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ m=\pm 1 \end{array}\right.$.

D. $m=1$.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)

$y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)$

Hàm số có 2 cực trị $m\neq 0$, gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$

Bấm máy tính:

$$-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1-\left(-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$-2000002+2000000i=-\left(2.10^6+2\right)+2.10^6 i=2m^2x-2m^2-2$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;2m^2x_1-2m^2-2\right);\ B\left(x_2;2m^2x_2-2m^2-2\right)$

ΔOAB vuông tại $O\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+\left(2m^2x_1-2m^2-2\right)\left(2m^2x_2-2m^2-2\right)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4m^2\left(m^2+1\right)\left(x_1+x_2\right)+4\left(m^2+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(1+4m^4\right)+4\left(m^2+1\right)\left(1+m^2-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-m^2\right)\left(4m^4+4m^2+5\right)=0\Leftrightarrow m=\pm 1.$

Câu 39. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2-mx+2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y=x-1\ (d)$.

A. $m=0$.

B. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

C. $m=2$.

D. $m=-\dfrac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)

$y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có 2 cực trị $m>-3$, gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, ta có:

$x_1+x_2=2$

Bấm máy tính:

$$x^3-3x^2-mx+2-\left(3x^2-6x-m\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$-\frac{994}{3}-\frac{2006}{3}i=-\frac{1000-6}{3}-\frac{2000+6}{3}i=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(x_1;-\frac{2m+6}{3}x_1-\frac{m-6}{3}\right);\ B\left(x_2;-\frac{2m+6}{3}x_2-\frac{m-6}{3}\right)$$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(1;-m\right)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}\ \left(\Delta\right)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta//d\ or\ \Delta\equiv d\\ I\in d\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{2m+6}{3}=1\\ -m=1-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{9}{2}\\ m=0\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m=0$.

Câu 40. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\pm\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ C. $m=\pm\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. D. $m=1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m\end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi $m>0\quad(*)$

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(0;m-1\right),B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|y_B-y_A\right|.\left|x_C-x_B\right|=m^2\sqrt{m}\ ;\ AB=AC=\sqrt{m^4+m},BC=2\sqrt{m}$$

$$R=\frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=1\Leftrightarrow\frac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=1\Leftrightarrow m^3-2m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $(*)$ ta có $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Áp dụng công thức: $R=\frac{b^3-8a}{8|a|b}\Leftrightarrow 1=\frac{(-2m)^3-8}{8(-2m)}\Leftrightarrow m^3+1=2m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $(*)$ ta có $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 41. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m=\pm 1$. B. $m=1$. C. $m=-1$. D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải:

$y'=y=4x^3-4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0;m^4+1\right),B\left(-m;1\right),C\left(m;1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng , ta có:

A,O,I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB\perp OB\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow m^2-m^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\pm 1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m=\pm 1$ (thỏa mãn).

Câu 42. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-8m^2x^2+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A. $m=\pm\sqrt[5]{2}.$ B. $m=\sqrt[5]{2}.$ C. $m=-\sqrt[5]{2}.$ D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\neq 0$

Áp dụng công thức $S_{\Delta ABC}=\dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$, ta có:

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\Rightarrow 64=\dfrac{64m^4}{4}\sqrt{\dfrac{8m^2}{2}}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt[5]{2}$ (thỏa mãn).

Câu 43. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m>2.$ B. $m<-1.$

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty).$ D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp tự luận)

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>0$

Ba điểm cực trị là $A(0;m),B\left(-\sqrt{m};m-m^2\right),C\left(\sqrt{m};m-m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow I\left(0;m-m^2\right)$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AI.BC=m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p=AB+BC+AC=2\left(\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}=\dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r>1\Leftrightarrow\dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}>1\Leftrightarrow\dfrac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)}{m^4}>1$ (vì $m>0$)

$\Leftrightarrow\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)>m^2\Leftrightarrow\sqrt{m^2+m^5}>m^2+m\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

Phương pháp trắc nghiệm:

Sử dụng công thức $r=\dfrac{b^2}{4|a|+\sqrt{16a^2-2ab^3}} \Rightarrow r=\dfrac{4m^2}{4+\sqrt{16+16m^3}}=\dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}$

Theo bài ra: $r>1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}>1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\left(\sqrt{1+m^3}-1\right)}{m^3}>1 \Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}-1>m$

$\sqrt{1+m^3}>m+1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}>m+1 \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

Câu 44. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-(3m-1)x^2+2m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m=3$. B. $m=1$. C. $m=-1$. D. Không tồn tại *m*.

Phương pháp trắc nghiệm:

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>\dfrac{1}{3}$

Áp dụng công thức:

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$x^2+y^2-\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=0$

Thay vào ta có phương trình:

$x^2+y^2-\left(\dfrac{-27m^3+75m^2-m-15}{4(3m-1)}\right)y+\dfrac{-54m^4+75m^3+41-27m-11}{4(3m-1)}=0\ (T)$

$D(7;3)\in(T) \Rightarrow 27m^4-78m^3+92m^2-336m+99=0$

Sử dụng chức năng SOLVE, tìm ra nghiệm duy nhất thỏa mãn là $m=3$.

Câu 45. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=-x^4+2mx^2-4m+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 hình thoi.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{4} \\ m=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$. B. $m=1$. C. $m=-1$. D. Không tồn tại *m*.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp tự luận)

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>0$

Ba điểm cực trị là: $A(0;1-4m), B\left(-\sqrt{m};m^2-4m+1\right), C\left(\sqrt{m};m^2-4m+1\right)$

Tứ giác $OBAC$ đã có $OB=OC, AB=AC$. Vậy tứ giác $OBAC$ là hình thoi chỉ cần thêm điều kiện

$$OB=AC \Leftrightarrow m+\left(m^2-4m+1\right)^2=m+m^4 \Leftrightarrow \left(m^2-4m+1\right)^2-m^4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2-4m+1-m^2\right)\left(m^2-4m+1+m^2\right)=0 \Leftrightarrow (1-4m)\left(2m^2-4m+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{4} \\ m=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$ (thỏa mãn).

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

A. $m=\pm\dfrac{1}{2}$. B. $m=\dfrac{1}{2}$. C. $m=-1$. D. $m=\pm1$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)=-3\left(x^2-2x-m^2+1\right)$.

$g(x)=x^2-2x-m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta'=m^2$. Do đó: y có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta'>0 \Leftrightarrow$ $m\neq 0$. (1)

Khi đó y' có các nghiệm là: $1\pm m$ $\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(1-m;-2-2m^3\right) \Rightarrow OA^2=(1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2$.

$\overrightarrow{OB}\left(1+m;-2+2m^3\right) \Rightarrow OB^2=(1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi :

$$OA=OB \Leftrightarrow OA^2=OB^2 \Leftrightarrow (1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2=(1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$$

$\Leftrightarrow -4m+16m^3=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

A. $m=\pm 2$. B. $m=2$. C. $m=-2$. D. $m=2$ hoặc $m=0$.

Hướng dẫn giải

$y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi : $2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$. (1)

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;3m^3\right)$, $B\left(2m;-m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(0;3m^3\right) \Rightarrow OA=3\left|m^3\right|$. (2)

Ta thấy $A\in Oy \Rightarrow OA\equiv Oy \Rightarrow d(B,OA)=d(B,Oy)=2|m|$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot d(B,OA)=3m^4$.

Do đó: $S_{\Delta OAB}=48 \Leftrightarrow 3m^4=48 \Leftrightarrow m=\pm 2$ (thỏa mãn (1)).

Câu 48. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m$ (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số (C) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA=BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

A. $m=2\pm 2\sqrt{2}$. B. $m=2+2\sqrt{2}$.

C. $m=2-2\sqrt{2}$. D. $m=\pm 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left[x^2-(m+1)\right]$.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi :

y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$. $(*)$

Khi đó, ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{m+1} \\ x=\sqrt{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0;m) \\ B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right), \\ C\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right) \end{cases}$

(vai trò của B, C trong bài toán là như nhau) nên ta giả sử :

$B\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$).

Ta có : $\overrightarrow{OA}(0;m) \Rightarrow OA=|m|$; $\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m+1};0\right) \Rightarrow BC=2\sqrt{m+1}$.

Do đó $OA=BC \Leftrightarrow |m|=2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m^2-4m-4=0$ $(\Delta'=8) \Leftrightarrow$ $m=2\pm2\sqrt{2}$ (thỏa mãn $(*)$).

Vậy $m=2\pm2\sqrt{2}$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$.

A. $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $m=0$ hoặc $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

$y'=3x^2-6mx$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m\neq0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;4m^3);B(2m;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn *AB* là $I(m;2m^3)$.

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ là AB vuông góc với đường thẳng $(d): y=x$ và $I\in(d)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

A. $m=-3+2\sqrt{2}$ hoặc $m=-3-2\sqrt{2}$.

B. $m=-3+2\sqrt{2}$ hoặc $m=-1$.

C. $m=-3-2\sqrt{2}$ hoặc $m=-1$.

D. $m=-3+2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1>0,\forall m$

Khi đó, điểm cực đại $A(m-1;2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1;-2-2m)$

Ta có $OA=\sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2+6m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3+2\sqrt{2} \\ m=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ (C) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m=\pm 1$.

B. $m=1$ hoặc $m=0$.

C. $m=-1$ hoặc $m=0$.

D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=4x^3-4m^2x=4x\left(x^2-m^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2 \end{array}\right.$

Hàm số (C) có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$ $(*)$. Với điều kiện $(*)$ gọi ba điểm cực trị là:

$A(0;1);B\left(-m;1-m^4\right);C\left(m;1-m^4\right)$. Do đó nếu ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân, thì sẽ vuông cân tại đỉnh A.

Do tính chất của hàm số trùng phương, tam giác ABC đã là tam giác cân rồi, cho nên để thỏa mãn điều kiện tam giác là vuông, thì AB vuông góc với AC.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-m;-m^4\right);\overrightarrow{AC}=\left(m;-m^4\right);\overrightarrow{BC}=(2m;0)$.

Tam giác ABC vuông khi: $BC^2=AB^2+AC^2 \Leftrightarrow 4m^2=m^2+m^8+\left(m^2+m^8\right)$

$\Leftrightarrow 2m^2\left(m^4-1\right)=0;\Rightarrow m^4=1\Leftrightarrow m=\pm 1$

Vậy với $m=\pm 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Phương pháp trắc nghiệm:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{b^3}{8a}+1=0\Leftrightarrow -m^6+1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{17}{11}$.

B. $m=1$.

C. $m=-1$ hoặc $m=-\dfrac{17}{11}$.

D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=m(3x^2-6x)$

Với mọi $m\neq 0$, ta có $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=3m-3\\ x=2\Rightarrow y=-m-3\end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0;3m-3);B(2;-m-3)$.

Ta có : $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20\Leftrightarrow 11m^2+6m-17=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=-\dfrac{17}{11}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m=1\\ m=-\dfrac{17}{11}\end{array}\right.$.

Câu 53. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C).Tìm tất cả các giá trị thực tham số m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ một góc α biết $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$.

A. $m=2$ hoặc $m=-\dfrac{2}{11}$.

B. $m=-2$ hoặc $m=-\dfrac{2}{11}$.

C. $m=2$ hoặc $m=\dfrac{2}{11}$.

D. $m=2$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng đi qua ĐCĐ, ĐCT là $\Delta_1 : 2x + y = 0$ có $VTPT\ \vec{n}_1(2;1)$

Đường thẳng đã cho $\Delta : x + my + 3 = 0$ có $VTPT\ \vec{n}_2(1;m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\Delta, \Delta_1) = \left|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right| = \dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{4}{5}$

$\Leftrightarrow 25(m^2 + 4m + 4) = 5.16.(m^2+1) \Leftrightarrow 11m^2 - 20m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{2}{11} \end{array}\right.$

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 0$. D. $m = 1 - \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 4x^3 - 8(m-1)x = 4x\left(x^2 - 2(m-1)\right)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2(m-1) \end{array}\right.$ nên hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 1$.

Với đk $m > 1$ đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A(0;2m-1), B\left(\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right), B\left(-\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right)$.

Ta có: $\begin{array}{l} AB^2 = AC^2 = 2(m-1) + 16(m-1)^4 \\ BC^2 = 8(m-1) \end{array}$

Để 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác đều thì:

$AB = AC = BC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(m-1) + 16(m-1)^4 = 8(m-1)$

$\Leftrightarrow 8(m-1)^4 - 3(m-1) = 0 \Leftrightarrow (m-1)\left[8(m-1)^3 - 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2} \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có: $m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$ thỏa mãn.

Phương pháp trắc nghiệm:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{b^3}{8a}+3=0 \Leftrightarrow -8\left(m-1\right)^3+3=0 \Leftrightarrow m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1\ (C)$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

A. $m=0$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+1 \end{array}\right. \Rightarrow \forall m\in\mathbb{R}$, hàm số luôn có CĐ, CT

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m;2m^3+3m^2+1),\ B(m+1;2m^3+3m^2)$

Suy ra $AB=\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$.
Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất.

Ta có: $d(M,AB)=\dfrac{3m^2+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M,AB)\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \min d(M,AB)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ đạt được khi $m=0$.