Bài 4: Một hộp chứa các quả cầu kích thước khác nhau gồm 4 quả cầu đỏ, 15 quả cầu xanh, 11 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả cầu được chọn có ít nhất 2 quả cầu khác màu.

LỜI GIẢI

Chọn 4 quả cầu trong 30 quả cầu, có $C_{30}^{4}$ cách. Vậy không gian mẫu $n(\Omega) = C_{30}^{4}$.

Gọi biến cố A " trong 4 quả cầu được chọn có ít nhất 2 quả cầu khác màu". Số trường hợp thuận lợi cho A là:

Trường hợp 1: Chọn được 2 quả cầu khác màu:

Chọn được 2 quả đỏ và 2 quả xanh, có $C_4^2C_{15}^2$ cách.

Chọn được 2 quả đỏ và 2 quả vàng, có $C_4^2C_{11}^2$ cách.

Chọn được 2 quả vàng và 2 quả xanh, có $C_{11}^2C_{15}^2$ cách.

Trường hợp 1 có $C_4^2C_{15}^2 + C_4^2C_{11}^2 + C_{11}^2C_{15}^2 = 6735$ cách.

Trường hợp 2: Chọn được 3 quả cầu khác màu:

Chọn được 2 quả cầu đỏ, 1 xanh và 1 quả vàng có $C_4^2C_{15}^1C_{11}^1$ cách.

Chọn được 2 quả cầu xanh, 1 quả đỏ và 1 quả vàng, có $C_{15}^2C_4^1C_{11}^1$ cách.

Chọn được 2 quả cầu vàng, 1 xanh và 1 quả đỏ có $C_{11}^2C_{15}^1C_4^1$ cách.

Trường hợp 2 có $C_4^2C_{15}^1C_{11}^1 + C_{15}^2C_4^1C_{11}^1 + C_{11}^2C_{15}^1C_4^1 = 8910$ cách.

Số thuận lợi cho A là $6735 + 9810 = 15645$ cách.

Xác suất cần tìm $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{15645}{C_{30}^4} = \dfrac{149}{261}$

Bài 3: Một bình chứa 7 bi xanh, 5 bi đỏ, 2 bi vàng. Bốc ngẫu nhiên 6 viên. Tính xác suất để:
a). 6 viên bốc được có đúng một màu.
b). 6 viên bốc được có đúng hai màu đỏ và vàng.
c). 6 viên bốc được có đủ ba màu.

LỜI GIẢI

Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi trong 14 viên bi, có $C_{14}^6$ cách. Vậy không gian mẫu $n(\Omega) = C_{14}^6$

a). Gọi biến cố A "6 viên bốc được có đúng một màu". Số thuận lợi cho A là $n(A) = C_7^6$ cách. Xác suất cần tìm $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_7^6}{C_{14}^6} = \dfrac{1}{429}$.

b). Gọi biến cố B "6 viên bốc được có đúng hai màu đỏ và vàng". Số trường hợp thuận lợi cho  là:

Trường hợp 1: Chọn được 1 vàng và 5 đỏ, có $C_2^1.C_5^5 = 2$ cách.

Trường hợp 2: Chọn được 2 vàng và 4 đỏ, có $C_2^2.C_5^4 = 5$ cách.

Số thuận lợi cho B là $n(B) = 2 + 5 = 7$ cách.

Xác suất cần tìm $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{7}{C_{14}^6} = \dfrac{1}{429}$.

c).

Trường hợp 1: Chọn được 1 vàng, 1 đỏ, 4 xanh, có $C_2^1C_5^1C_7^4$ cách.

Trường hợp 2: Chọn được 1 vàng, 2 đỏ, 3 xanh, có $C_2^1C_5^2C_7^3$ cách.

Trường hợp 3: Chọn được 1 vàng, 3 đỏ, 2 xanh, có $C_2^1C_5^3C_7^2$ cách.

Trường hợp 4: Chọn được 1 vàng, 4 đỏ, 1 xanh, có $C_2^1C_5^4C_7^1$ cách.

Trường hợp 5: Chọn được 2 vàng, 1 đỏ, 3 xanh, có $C_2^2C_5^1C_7^3$ cách.

Trường hợp 6: Chọn được 2 vàng, 2 đỏ, 2 xanh, có $C_2^2C_5^2C_7^2$ cách.

Trường hợp 7: Chọn được 2 vàng, 3 đỏ, 1 xanh, có $C_2^2C_5^3C_7^1$ cách.

Số thuận lợi cho C là $n(C) = C_2^1C_5^1C_7^4 + C_2^1C_5^2C_7^3 + C_2^1C_5^3C_7^2 + C_2^1C_5^4C_7^1 + C_2^2C_5^1C_7^3 + C_2^2C_5^2C_7^2 + C_2^2C_5^3C_7^1 = 1995$ cách. Xác suất cần tìm $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1995}{C_{14}^6} = \frac{95}{143}$

Một hộp bút có 10 bút xanh và 7 bút đỏ. Lấy ngẫu nhiên 5 bút. Tính xác suất sao cho trong 5 bút lấy ra không cùng một màu.

LỜI GIẢI

Chọn 5 bút trong 17 bút có $C_{17}^5$ cách. Vậy không gian mẫu $n(\Omega) = C_{17}^5$.

Số trường hợp lấy ra cả 5 bút đều màu xanh có $C_{10}^5$ cách.

Số trường hợp lấy ra cả 5 bút đều màu đỏ có $C_7^5$ cách.

Số trường hợp lấy ra 5 bút không cùng một màu là $C_{17}^5 - \left(C_{10}^5 + C_7^5\right) = 5915$ cách.

Gọi biến cố A "Chọn được 5 bút không cùng một màu". Số trường hợp thuận lợi cho A là $n(A) = 5915$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5915}{C_{17}^5} = \frac{65}{68}$

Từ một hộp có 13 bóng đèn, trong đó có 6 bóng hỏng, lấy ngẫu nhiên 5 bóng ra khỏi hộp. Tính xác suất sao cho:
a). Có nhiều nhất 2 bóng hỏng. b). Có ít nhất 1 bóng tốt.

LỜI GIẢI

Chọn 5 bòng đèn trong 13 bóng có $C_{13}^5$ cách. Vậy không gian mẫu $n(\Omega) = C_{13}^5$.

a). Gọi biến cố A "Chọn được 5 bóng và nhiều nhất 2 bóng hỏng". Có các trường hợp thuận lợi cho A là:

Trường hợp 1: Chọn được 2 bóng hỏng và 3 bóng tốt có $C_6^2.C_7^3$ cách.

Trường hợp 2: Chọn được 1 bóng hỏng và 4 bóng tốt có $C_6^1.C_7^4$ cách.

Trường hợp 3: Chọn được 5 bóng đều tốt có $C_7^5$ cách.

Số cách thuận lợi cho A là $n(A) = C_6^2.C_7^3 + C_6^1C_7^4 + C_7^5 = 756$ cách.

Xác suất cần tìm $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{756}{C_{13}^5} = \frac{84}{143}$.

b). Gọi biến cố B "Chọn được 5 bóng và có ít nhất một bóng tốt". Gọi biến cố $\overline{B}$ "Chọn được 5 bóng đều không tốt" có nghĩa cả 5 bóng đều hỏng, số cách thuận lợi cho $\overline{B}$ là $n(\overline{B}) = C_6^5$. Dễ thấy B và $\overline{B}$ là hai biến cố đối nên xác suất cần tìm là:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_6^5}{C_{13}^5} = \frac{427}{429}.$$

Gọi A là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà mỗi chữ số đều lớn hơn 4. Hãy xác định số phần tử của tập A. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập A, tính xác suất để số được chọn có ba chữ số lẻ đứng kề nhau.

LỜI GIẢI

Vì số tự nhiên cần tìm có 5 chữ số khác nhau mà mỗi chữ số đều lớn hơn 4, có nghĩa số tự nhiên cần tìm được thành lập từ các chữ số {5, 6, 7, 8, 9}.

Vậy số phần tử của tập hợp A là $5! = 120$ số.

Gọi $n = \overline{abcde}$ là một số được chọn từ tập A thỏa có ba chữ số lẻ đứng kề nhau.

Vì ba chữ số lẻ đứng gần nhau nên gom chúng thành chữ số X.

Bước 1: Xếp X và hai chữ số chẵn còn lại có 3! Cách xếp.

Bước 2: Ứng với mỗi cách ở bước 1, có 3! Cách xếp các phần tử trong X.

Vậy có $3!.3! = 36$ số n cần tìm. Kết luận xác suất cần tìm: $P = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

Cho tập hợp $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có nhiều nhất ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được thành lập từ tập E. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập hợp M. Tính xác suất lấy được một số thuộc tập M, sao cho tổng các chữ số của số đó bằng 10.

LỜI GIẢI

Các số có một chữ số được thành lập từ tập E là 6 số.

Các số có hai chữ số khác nhau được thành lập từ tập E là $A_6^2 = 30$ số.

Các số có ba chữ số khác nhau được thành lập từ tập E là $A_6^3 = 120$ số.

Suy ra số phần tử thuộc tập hợp M là $6 + 30 + 120 = 156$.

Gọi A là biến cố "Chọn được một số từ tập M sao cho số được chọn có tổng các chữ số bằng 10".

Các tập con của E có nhiều nhất ba phần tử, có tổng các phần tử bằng 10 là:

$\{4,6\};\{1,3,6\};\{1,4,5\};\{2,3,5\}$. Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

$n(A) = 2! + 3.3! = 20$. Xác suất cần tìm $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{156} = \frac{5}{59}$.

Cho đa giác đều gồm 2n đỉnh. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong số 2n đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là $0,2$. Tìm n, biết n là số nguyên dương và $n \geq 2$.

LỜI GIẢI

Số cách chọn 3 đỉnh trong 2n đỉnh của đa giác là $C_{2n}^3$.

Ba đỉnh được chọn tạo thành tam giác vuông khi và chỉ khi có hai đỉnh trong ba đỉnh là hai đầu mút của một đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác, và đỉnh còn lại là một trong số $2n-2$ đỉnh còn lại của đa giác.

Số cách chọn một đường kính (mà hai đầu mút là hai đỉnh trong số 2n đỉnh của đa giác) là n. Suy ra số cách chọn 3 đỉnh trong số 2n đỉnh của đa giác để chúng tạo thành một tam giác vuông là $n(2n-2)$.

Vì xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là 0,2 nên

$$\frac{n(2n-2)}{C_{2n}^3} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{6n(2n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow n = 8.$$

Có 10 học sinh lớp A, 9 học sinh lớp B và 8 học sinh lớp C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ các học sinh nói trên. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất hai học sinh lớp A.

LỜI GIẢI

Chọn 5 học sinh bất kỳ trong 27 học sinh có $C_{27}^5$ cách. Vậy số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{27}^5$.

Gọi biến cố X: ''5 học sinh được chọn lớp nào cũng có và học sinh lớp A ít nhất là hai ''. Có các trường hợp thuận lợi cho X sau :

Trường hợp 1 : 5 học sinh được chọn có 2 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C. Số cách chọn là $C_{10}^2.C_9^2.C_8^1$.

Trường hợp 2 : 5 học sinh được chọn có 2 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C. Số cách chọn là $C_{10}^2.C_9^1.C_8^2$.

Trường hợp 3 : 5 học sinh được chọn có 3 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C. Số cách chọn là $C_{10}^3.C_9^1.C_8^1$.

Số trường hợp thuận lợi cho A là : $n(A) = C_{10}^2.C_9^2.C_8^1 + C_{10}^2.C_9^1.C_8^2 + C_{10}^3.C_9^1.C_8^1 = 32940$ cách. Xác suất cần tìm $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{32940}{C_{27}^5} = \frac{122}{299}$

Bài 6: Tổ I có 5 học sinh nam, 6 nữ. Tổ II có 7 nữ, 4 nam. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ 2 học sinh để được 4 học sinh. Tính xác suất của các biến cố sau:
a). 4 học sinh được chọn gồm 2 nam, 2 nữ.
b). Trong 4 học sinh được chọn có đúng 1 học sinh nữ.

LỜI GIẢI

Chọn 2 học sinh trong 11 học sinh ở tổ I có $C_{11}^2$ cách. Chọn 2 học sinh trong 11 học sinh ở tổ II có $C_{11}^2$ cách. Không gian mẫu $n(\Omega) = C_{11}^2.C_{11}^2 = 3025$ cách.

a). Gọi biến cố A "4 học sinh được chọn gồm 2 nam, 2 nữ". Số trường hợp thuận lợi cho A là:

Trường hợp 1: Tổ I chọn được 2 nam và tổ II chọn được 2 nữ, có $C_5^2.C_7^2$ cách.

Trường hợp 2: Tổ I chọn được 2 nữ và tổ II chọn được 2 nam, có $C_6^2.C_4^2$ cách.

Trường hợp 3: Mỗi tổ đều chọn được 1 nam và 1 nữ, có $C_5^1.C_6^1.C_7^1.C_4^1$ cách.

Số thuận lợi cho A là $n(A) = C_5^2.C_7^2 + C_6^2.C_4^2 + C_5^1.C_6^1.C_7^1.C_4^1 = 1140$ cách.

Xác suất cần tìm: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1140}{3025} = \frac{228}{605}$.

b). Gọi biến cố B "4 học sinh được chọn có đúng 1 học sinh nữ". Số trường hợp thuận lợi cho B là:

Trường hợp 1: Tổ I chọn được 2 nam và tổ II chọn được 1 nam và 1 nữ, có $C_5^2.C_4^1.C_7^1$ cách.

Trường hợp 2: Tổ I chọn được 1 nam và 1 nữ và tổ II chọn được 2 nam, có $C_5^1 C_6^1.C_4^2$ cách.

Số thuận lợi cho B là $n(B) = C_5^2.C_4^1.C_7^1 + C_5^1 C_6^1.C_4^2 = 460$ cách.

Xác suất cần tìm: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{460}{3025} = \frac{92}{605}$.

Gọi A là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp A, tính xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4.

LỜI GIẢI

Số phần tử của A là $A_5^3 = 60$ số.

Các phần tử thuộc tập A mà không có mặt chữ số 4 là $A_4^3 = 24$ số.

Các phần tử thuộc tập A mà có mặt chữ số 4 là : $60 - 24 = 36$.

Số cách chọn ba phần tử khác nhau thuộc tập A là $n(\Omega) = C_{60}^3$.

Số cách chọn ba phần tử khác nhau thuộc tập A trong đó có đúng một phần tử có mặt chữ số 4 là $C_{36}^{1}.C_{24}^{2}$. Kết luận xác suất cần tìm là $P=\frac{C_{36}^{1}.C_{24}^{2}}{C_{60}^{3}}=\frac{2484}{8555}$.

Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. giáo viên chủ nhiệm chọn 5 em học sinh để lập một tốp ca hát chào mừng ngày khai giảng. Tính xác suất sao cho trong đó có ít nhất một học sinh nữ.

LỜI GIẢI

Chọn ngẫu nhiên 5 em học sinh trong 35 em của lớp có $C_{35}^{5}$ cách chọn. Vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{35}^{5}$.

Gọi biến cố A là ''Chọn được 5 học sinh trong đó có ít nhất một em nữ''. Suy ra $\overline{A}$ là biến cố '' Chọn được 5 học sinh trong đó không có học sinh nữ'' có nghĩa 5 em được chọn đều là nam. Số kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $n(\overline{A})=C_{20}^{5}$.

Vì A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối nhau nên $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{20}^{5}}{C_{35}^{5}}=\frac{2273}{2387}$.