

8). $\sin^4 x + \cos^{15} x = 1$

$$\sin^4 x + \cos^{15} x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^4 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^{15} x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = \cos^2 x (1 - \cos^{13} x) \quad (1)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^2 x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x (\sin^2 x - 1) \leq 0, \forall x,$$

$$\text{và } \begin{cases} \cos^2 x \geq 0 \\ 1 - \cos^{13} x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x (1 - \cos^{13} x) \geq 0, \forall x$$

$$\text{Từ đó (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (1 - \cos^{13} x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \\ \cos^{13} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x = n2\pi \end{cases}, (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

9). $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) - 1 = \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi \cos^2 x) = \cos(\pi \sin 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} \pi \cos^2 x = \pi \sin 2x + k2\pi \\ \pi \cos^2 x = -\pi \sin 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \sin 2x + k \\ \cos^2 x = -\sin 2x + k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \cos 2x}{2} = \sin 2x + k \\ \frac{1 + \cos 2x}{2} = -\sin 2x + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - 2 \sin 2x = 4k - 1 \quad (1) \\ \cos 2x + 2 \sin 2x = 4k - 1 \quad (2) \end{cases}$$

Điều kiện để phương trình (1) hoặc phương trình (2) có nghiệm là:

$$1^2 + 2^2 \geq (4k - 1)^2 \Leftrightarrow 16k^2 - 8k - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \text{ vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên chọn } k = 0$$

Thay $k = 0$ vào (1) được $\cos 2x - 2 \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x - 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\cos x - 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \end{cases}$$

Thay $k = 0$ vào (1) được $\cos 2x + 2 \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\cos x + 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -2 \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi \end{cases}$$

hoc360.net