So với điều kiện phương trình vô nghiệm.

Giải các phương trình sau:

1). $4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)=\cos x+3\sin x$ [Dự bị 1 ĐH B04]

2). $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x-\sin x=0$ [Dự bị 2 ĐH A05]

3). $\tan x.\sin^2 x-2\sin^2 x=3\left(\cos 2x+\sin x.\cos x\right)$

4). $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$

5). $\sin^3 x-4\sin^2 x\cos x+5\sin x\cos^2 x-2\cos^3 x=0$

LỜI GIẢI

1). $4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)=\cos x+3\sin x$

Trường hợp 1: Xét $\cos x=0\Rightarrow \sin x=\pm 1$ thay vào (1) được $\pm 4=\pm 3$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x\neq 0$, chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$:

$$4\left(\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}\right)=\frac{\cos x}{\cos^3 x}+3\frac{\sin x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow 4\left(\tan^3 x+1\right)=\left(1+\tan^2 x\right)+3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0\Leftrightarrow \tan x=1\vee \tan x=\pm\sqrt{3}$$

Với $\tan x=1\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $\tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $\tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

2). $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x-\sin x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^3-3\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^3-3\cos x-\sin x=0\quad (2)$$

Trường hợp 1: Xét $\cos x=0\Rightarrow \sin x=\pm 1$, thay vào (2) được $0=0$ (đúng).

Vậy $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ là một họ nghiệm của phương trình.

Trường hợp 2: Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế của (2) cho $\cos^3 x$:

$$\frac{(\cos x+\sin x)^3}{\cos^3 x}-3\frac{\cos x}{\cos^3 x}-\frac{\sin x}{\cos^3 x}=0\Leftrightarrow \left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^3-3.\frac{1}{\cos^2 x}-\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\tan x)^3-3\left(1+\tan^2 x\right)-\tan x\left(1+\tan^2 x\right)=0\ \Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

3). $\tan x.\sin^2 x-2\sin^2 x=3\left(\cos 2x+\sin x.\cos x\right)$

$$\Leftrightarrow \tan x.\sin^2 x-2\sin^2 x=3\left(2\cos^2 x-1+\sin x\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan x.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}=3\left(\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right)$$

$\Leftrightarrow \tan x.\tan^2 x - 2\tan^2 x = 3\left(2 - \left(1 + \tan^2 x\right) + \tan x\right)$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x = 6 - 3 - 3\tan^2 x + 3\tan x$

$\Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \vee \tan x = -1 \vee \tan x = -\sqrt{3}$

$\circ \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\circ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\circ \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

4). $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

e) $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x \ (1)$

Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{3}$

$(1) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = \cos 3\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = \cos(3t - \pi) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = \sin 3t$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t \quad (*)$

Ta thấy $\cos t = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $(*)$

Chia hai vế của $(*)$ cho $\cos^3 t$ được: $8 = 3\tan t\left(1 + \tan^2 t\right) - 4\tan^3 t$

$\Leftrightarrow 8 = 3\tan t + 3\tan^3 t - 4\tan^3 t \Leftrightarrow \tan^3 t - 3\tan t + 8 = 0.$

5). $\sin^3 x - 4\sin^2 x\cos x + 5\sin x\cos^2 x - 2\cos^3 x = 0 \ (1)$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \quad (1) \Leftrightarrow \pm 1 = 0$ (vô lý)

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$, chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$ được:

$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - 4\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^3 x} + \frac{5\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x} - 2\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - 4\tan^2 x + 5\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 2 \ \vee \ \tan x = 1$

Với $\tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi \ (k \in z)$

Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in z)$