Câu : Giải các phương trình sau:

1). $\tan x = \cot x + 4\cos^2 2x$ (1) [Dự bị 1 ĐH A08]

2). $\dfrac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (1) [Dự bị 2 ĐH D08]

3). $\dfrac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (1) [ĐH A10]

4). $\dfrac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x \sin 2x$ (1) [ĐH A11]

5). $\dfrac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ (1) [ĐH D11]

6). $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (1) [ĐH A 2013]

LỜI GIẢI

1). $\tan x = \cot x + 4\cos^2 2x$ (1)

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} + 4\cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\cos^2 2x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 4x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(1 + \sin 4x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \cos 2x = 0$ hoặc $\sin 4x = -1$.

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in ¢)$.

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in ¢)$

2). $\dfrac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(\tan^2 x + \tan x\right) = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(\dfrac{\sin^2 x + \sin x\cos x}{\cos^2 x}\right) = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sin x + \cos x\right) - \left(\sin x + \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x + \cos x\right)\left(2\sin x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \vee 2\sin x = 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

3). $\dfrac{\left(1 + \sin x + \cos 2x\right)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x \quad (1)$

Điều kiện $\begin{cases} 1 + \tan x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\left(1\right) \Leftrightarrow \dfrac{\left(1 + \sin x + \cos 2x\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x + \cos x\right)\cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

$\Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\dfrac{1}{2}$

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ so với điều kiện nghiệm này loại.

Với $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$ $,\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

4). $\dfrac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x\sin 2x \quad (1)$

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\left(1\right) \Leftrightarrow \left(1 + \sin 2x + \cos 2x\right)\sin^2 x = 2\sqrt{2}\sin^2 x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x + 1 + \cos 2x = 2\sqrt{2}\cos x \quad \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 2\sqrt{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \cos x=0 \vee \sin x+\cos x-\sqrt{2}=0$

Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in ¢$

Với $\sin x+\cos x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

5). $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ (1)

Điều kiện $\begin{cases}\tan x+\sqrt{3}\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases},\left(k\in ¢\right)$

$(1) \Leftrightarrow \sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sin x+2\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x-1\right)+\left(2\cos x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(2\cos x-1\right)\left(\sin x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x-1=0 \vee \sin x+1=0$

Với $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in ¢$

Với $\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in ¢$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in ¢$

6). $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ (1)

Điều kiện $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in ¢$

$(1) \Leftrightarrow 1+\frac{\sin x}{\cos x}=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \sin x+\cos x=2\sqrt{2}\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos x-1\right)=0$

Với $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$