Câu 1 : giải các phương trình sau:

1). $2\cos^2 2x - 2\cos 2x + 4\sin 6x + \cos 4x = 1 + 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x$

2). $\sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x + \cos 2x - \cos x = 2$

3). $\cos 2x + 5 = 2(2-\cos x)(\sin x - \cos x)$

4). $\cos 2x.\cos x + \cos x = \sin 2x.\sin x$

5). $2\cos 5x.\cos 3x + \sin x = \cos 8x$

6). $2\sin x\cos^2\frac{x}{2} + \sin x\cos 2x = \cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

7). $2\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = (2+\sin x)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

8). $1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \cos 3x$

9). $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin 2x\cos x + 3\sin x = 1 + \sin 3x$

LỜI GIẢI

1). $2\cos^2 2x - 2\cos 2x + 4\sin 6x + \cos 4x = 1 + 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x \ (*)$

$(*) \Leftrightarrow 1 + \cos 4x - 2\cos 2x + 4\sin 6x + \cos 4x = 1 + 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x$ (hạ bậc $\cos^2 2x$)

$\Leftrightarrow 2(\cos 4x - \cos 2x) + 8\sin 3x\cos 3x = 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x$ (biến đổi tổng thành tích)

$\Leftrightarrow -4\sin 3x.\sin x + 8\sin 3x.\cos 3x - 4\sqrt{3}\sin 3x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow -4\sin 3x\left(\sin x - 2\cos 3x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \quad \vee \quad \sin x + \sqrt{3}\cos x - 2\cos 3x = 0$

Với: $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in Z)$

Với: $\sin x + \sqrt{3}\cos x - 2\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\cos 3x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{2}{2}\cos 3x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}.\cos x + \sin x.\sin\frac{\pi}{6} = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, (k \in Z)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x=\frac{k\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in Z)$

2). $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos 2x-\cos x=2(*)$

$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x\right)+\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=2$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=1$

$\Leftrightarrow\left(\cos 2x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

Để ý $2x-\frac{\pi}{3}=2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, áp dụng nhân đôi được: $\Leftrightarrow 1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\ \Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left[2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right]=0$

$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\quad\vee\quad 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1=0$

Với $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi\quad(k\in Z)$

Với $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1=0\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\vee x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$

Kết luận nghiệm phương trình $\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $x=\pi+k2\pi$ $(k\in Z)$

3). $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)(*)$

Phân phối vế phải được:

$(*)\Leftrightarrow\cos 2x+5=4\sin x-4\cos x-2\sin x\cos x+2\cos^2 x$

Hạ bậc $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, sau đó rút gọn được:

$\Leftrightarrow 4(\sin x-\cos x)-2\sin x\cos x-4=0$, đây là phương trình cơ bản áp dụng

Đặt $t=\sin x-\cos x$. Điều kiện: $|t|\le\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow t^2+4t-5=0\Leftrightarrow t=1\quad\vee\quad t=-5$ (loại)

Với $t=1 \Leftrightarrow \sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \vee x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\pi+k2\pi\ (k\in Z)$

4). $\cos 2x.\cos x+\cos x=\sin 2x.\sin x(*)$

LỜI GIẢI

Chuyển các phần tử vế phải sang vế trái được:

$(*) \Leftrightarrow (\cos 2x.\cos x-\sin 2x.\sin x)+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos 3x+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos 3x=-\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x=\cos(\pi-x) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \vee x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$

5). $2\cos 5x.\cos 3x+\sin x=\cos 8x(*)$

LỜI GIẢI

Ý tưởng: Biến đổi tích thành tổng $2\cos 5x.\cos 3x=\cos 2x+\cos 8x$

$(*) \Leftrightarrow \cos 2x+\cos 8x+\sin x=\cos 8x \Leftrightarrow \cos 2x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=1 \vee \sin x=-\frac{1}{2}$

Với $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in ¢)$.

Với $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in Z)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in Z)$

6). $2\sin x\cos^2\frac{x}{2}+\sin x\cos 2x=\cos 2x+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(*)$

LỜI GIẢI

$(*) \Leftrightarrow 2\sin.\cos^2\frac{x}{2}+\sin.\cos 2x=\cos 2x+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Có $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ *và* $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$, *nên:*

$\Leftrightarrow \sin(1+\cos x)+\sin x\cos 2x=\cos 2x+\cos x+\sin x$.

$\Leftrightarrow \sin x+\sin x\cos x+\sin x\cos 2x=\cos 2x+\cos x+\sin x$.

$\Leftrightarrow (\sin x\cos x-\cos x)+(\sin x\cos 2x-\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow \cos x(\sin x-1)+\cos 2x(\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\cos x+\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \sin x-1=0 \quad \vee \quad \cos x+\cos 2x=0$

Với $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in Z)$

Với $\cos x+\cos 2x=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \vee \cos x=\frac{1}{2}$

- $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$.
- $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in Z)$.

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi; x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in Z)$.

7). $2\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}=(2+\sin x)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)(*)$

LỜI GIẢI

Ta có $\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$

$$=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)$$

$(*)\Leftrightarrow -4\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)\cos\frac{x}{2}=(2+\sin x)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left[2(2+\sin x)\cos\frac{x}{2}+(2+\sin x)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)(2+\sin x)\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \vee 2\cos\frac{x}{2}+1=0 \vee 2+\sin x=0$

Với $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in Z)$.

Với $2\cos\frac{x}{2}+1=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{4\pi}{3}+k4\pi \quad (k\in Z)$.

Với $2+\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=-2$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pm\frac{4\pi}{3}+k2\pi,(k\in Z)$.

8). $1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\cos 3x(*)$

LỜI GIẢI

$(*) \Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos 2x=\cos x+\cos 3x$

$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)+\sin 2x=2\cos 2x.\cos x \quad \Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin x\cos x-2\cos 2x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x+\sin x-\cos 2x)=0 \qquad \Leftrightarrow \cos x\left[(\cos x+\sin x)-(\cos^2 x-\sin^2 x)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[(\cos x+\sin x)-(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x+\sin x)(1-\cos x+\sin x)=0$.

$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos x+\sin x=0 \vee 1-\cos x+\sin x=0$

Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$.

Với $\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi(k\in Z)$.

Với $\cos x-\sin x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=k2\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in Z)$.

Nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $x=k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in Z)$

9). $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin 2x\cos x+3\sin x=1+\sin 3x(*)$

LỜI GIẢI

Áp dụng công thức cộng và biến đổi tích thành tổng

$(*) \Leftrightarrow 2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)+\sin 3x+\sin x+3\sin x=1+\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 4\sin x = 1 \qquad \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + 4\sin x = 1 - \cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 4\sin x = 2\sin^2 x \qquad \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x + 2 - \sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\cos x - \sin x + 2 = 0$

Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\left(k \in Z\right)$.

Với $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -2 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in Z\right)$.

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = k\pi;\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\left(k \in Z\right)$.

Câu 2: giải các phương trình sau:

1). $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x-1$

2). $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{4+\sin x}{2}$

3). $\sin 4x+2=\cos 3x+4\sin x+\cos x$

4). $2\sin^2 x-\sin 2x+\sin x+\cos x-1=0$

5). $\sin 3x+2\cos 2x=3+4\sin x+\cos x(1+\sin x)$

6). $\sin 4x+\cos 4x+\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\left(\sin 3x+\cos 3x-1\right)+2\cos x$

7). $\sin 3x+(1-\cos x)\cos 2x=(\sin x+2\cos x).\sin 2x$

8). $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+1=\sqrt{3}\sin x+3\cos x$

LỜI GIẢI

2). $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x-1$

$\Leftrightarrow\ \sin 2x-\cos 2x=2\sin x-1 \quad \Leftrightarrow\ 2\sin x.\cos x+1-\cos 2x-2\sin x=0$

$\Leftrightarrow\ 2\sin x.\cos x+2\sin^2 x-2\sin x=0 \ \Leftrightarrow\ 2\sin x(\cos x+\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow\ \sin x=0 \vee \cos x+\sin x-1=0$

$*$ Với $\sin x=0 \ \Leftrightarrow\ x=k\pi \ \ (k\in \text{¢})$

$*$ Với $\cos x+\sin x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \ \ x=k2\pi,(k\in \text{¢})$

Kết luận nghiệm của phương trình : $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \ (k\in \text{¢})$ (vì nghiệm $k2\pi$ là con của nghiệm $k\pi$)

5). $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{4+\sin x}{2}$

Có bình phương hạ bậc

$$\Leftrightarrow\ \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)}{2}=\frac{4+\sin x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=4+\sin x \ \Leftrightarrow\ 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).\cos 2x=2+\sin x$$

$\Leftrightarrow\ -\cos 2x = 2 + \sin x$ $\Leftrightarrow\ -(1 - 2\sin^2 x) = 2 + \sin x$

$\Leftrightarrow\ 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0 \ \Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{3}{2}$ (loại).

$*$ Với $\sin x = -1 \ \Leftrightarrow\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình : $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in ¢)$

6). $\sin 4x + 2 = \cos 3x + 4\sin x + \cos x$

Sử dụng công thức nhân đôi và kỹ thuật gom nhân tử chung

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x = (\cos 3x + \cos x) + (4\sin x - 2)$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos 2x = 2\cos 2x.\cos x + 2(2\sin x - 1)$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos 2x - 2\cos 2x.\cos x - 2(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x(2\sin x - 1) - 2(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x.\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \vee 2\cos 2x.\cos x - 2 = 0$

$*$ Với $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

$*$ Với $2\cos 2x.\cos x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos 3x + \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow\ 4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ 4\cos^3 x - 2\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow\ \cos x = 1 \ \Leftrightarrow\ x = k2\pi \ (k \in ¢)$

Vậy phương trình có các nghiệm : $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $x = k2\pi \ (k \in ¢)$

9). $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow\ (2\sin^2 x + \sin x - 1) - 2\sin x.\cos x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow\ (2\sin x - 1)(\sin x + 1) - \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow\ (2\sin x - 1)(\sin x + 1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \vee \sin x - \cos x = -1$

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Với $\sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

Nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ x=k2\pi,\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

10). $\sin 3x+2\cos 2x=3+4\sin x+\cos x(1+\sin x)$

(tách $4\sin x=\sin x+3\sin x$, sau đó chuyển $\sin x$ ra vế trước)

$\Leftrightarrow\ \sin 3x-\sin x+2\cos 2x=3(1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow\ 2\cos 2x.\sin x+2\cos 2x=(1+\sin x)(3+\cos x)$

$\Leftrightarrow\ 2\cos 2x(\sin x+1)-(1+\sin x)(3+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow\ (\sin x+1)(2\cos 2x-\cos x-3)=0\Leftrightarrow \sin x+1=0\vee 2\cos 2x-\cos x-3=0$

$*$ Với $\sin x+1=0\ \Leftrightarrow\ \sin x=-1\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$

$*$ Với $2\cos 2x-\cos x-3=0\ \Leftrightarrow\ 4\cos^2 x-\cos x-5=0\Leftrightarrow \cos x=-1\vee \cos x=\frac{5}{4}$ (loại).

$\Leftrightarrow\ x=\pi+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ ,\ x=\pi+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$

12). $\sin 4x+\cos 4x+\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\left(\sin 3x+\cos 3x-1\right)+2\cos x$

$\Leftrightarrow\ (\sin 4x+\sin 2x)+(\cos 4x+\cos 2x)=\sqrt{3}(\sin 3x+\cos 3x-1)+2\cos x$

$\Leftrightarrow\ 2\sin 3x.\cos x+2\cos 3x.\cos x-2\cos x=\sqrt{3}(\sin 3x+\cos 3x-1)$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x(\sin 3x+\cos 3x-1)=\sqrt{3}(\sin 3x+\cos 3x-1)$

$\Leftrightarrow\ (\sin 3x+\cos 3x-1)(2\cos x-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow \sin 3x+\cos 3x-1=0\vee 2\cos x-\sqrt{3}=0$

$*$ Với $\sin 3x+\cos 3x=1\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x=\frac{k2\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$

$*$ Với $2\cos x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Leftrightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3},x=\frac{k2\pi}{3},\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

13). $\sin 3x+(1-\cos x)\cos 2x=(\sin x+2\cos x).\sin 2x$

Ý tưởng: Phân phối chuyển vế áp dụng công thức cộng, và biến đổi tích thành tổng

$\Leftrightarrow\ \sin 3x+\cos 2x-\cos 2x.\cos x=\sin 2x.\sin x+2\sin 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow\ \sin 3x + \cos 2x = (\cos 2x.\cos x + \sin 2x.\sin x) + \sin 3x + \sin x$

$\Leftrightarrow\ \cos 2x = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow\ (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow\ (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = 0\\ \cos x - \sin x - 1 = 0\end{array}\right.$

$*$ Với $\cos x + \sin x = 0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\ \Leftrightarrow\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi\ \Leftrightarrow\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ \ (k \in ¢)$

$*$ Với $\cos x - \sin x - 1 = 0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi\\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right.\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right.\ (k \in ¢)$

Vậy nghiệm của phương trình : $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $x = k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\ \ (k \in ¢)$

15). $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 1 = \sqrt{3}\sin x + 3\cos x$

$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{3}\sin x.\cos x - \sqrt{3}\sin x - (2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}\sin x(2\cos x - 1) - (2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}\sin x(2\cos x - 1) - (\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow\ (2\cos x - 1)(\sqrt{3}\sin x - \cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x - 1 = 0\ \vee\ \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2 = 0$

$*$ Với $2\cos x - 1 = 0\ \Leftrightarrow\ \cos x = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \cos x = \cos\frac{\pi}{3}\ \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\ \ (k \in ¢)$

$*$ Với $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1\ \Leftrightarrow\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

Nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in ¢)$

Câu 3: Giải các phương trình sau:

1). $1+\sin x+(1+\sin x).\sin 2x=\cos 2x \quad (*)$

2). $2\sin^3 x-\cos 2x+\cos x=0 \quad (*)$

3). $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=\left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x \quad (*)$

4). $\sin^3 x-\cos^3 x+3\sin^2 x+4\sin x-\cos x+2=0 \quad (*)$

5). $\sin 4x+2\cos 2x+4(\sin x+\cos x)=1+\cos 4x \quad (*)$

6). $\cos 3x-2\sin 2x-\cos x-\sin x-1=0 \quad (*)$

7). $\sin 2x-\cos x2x+4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-4\cos x+1=0 \quad (*)$

8). $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \quad (*)$

LỜI GIẢI

1). $1+\sin x+(1+\sin x).\sin 2x=\cos 2x \quad (*)$

$(*)\Leftrightarrow 1-\cos 2x+\sin x+(1+\sin x)2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x+(1+\sin x).2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x=0(1)$ hoặc $2\sin x+1+(1+\sin x).2\cos x=0 \quad (2)$

$(1)\Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in Z)$

$(2)\Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x+2(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0\vee\sin x+\cos x+2=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\vee\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ (vô nghiệm)

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in Z)$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=k\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in Z)$.

2). $2\sin^3 x-\cos 2x+\cos x=0 \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow 2\sin^3 x + 2\sin^2 x - 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x(1+\sin x) - (1-\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)(1+\sin x) - (1-\cos x) = 0 \Leftrightarrow (1-\cos x)\left[2(1+\cos x)(1+\sin x) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[1 + 2(\sin x + \cos x) + \sin 2x\right] = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \cos x = 0$ (1) hoặc $1 + 2(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0$ (2).

Giải $(1) \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giải (2) đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

$(2) \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -2$ (loại).

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm $x = k2\pi,\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

3). $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\cos x \quad (*)$

Điều kiện $\sin x \ne 0$

Chia cả hai vế phương trình $(*)$ cho $\sin^2 x \ne 0$, ta được $\frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x} + 2\sqrt{2} = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad (**)$

Đặt $t = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ $(**) \Leftrightarrow 3t^2 - \left(2 + 3\sqrt{2}\right)t + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$

Với $t = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{2}\sin^2 x \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $\cos x = -\sqrt{2}$ (loại)

Từ đó được nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi.$

Với $t = \frac{2}{3}$ biến đổi về $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ được $\cos x = \frac{1}{2}$ hoặc $\cos x = -2$ (loại), từ đó được nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.$

Vậy phương trình có các họ nghiệm như trên.

4). $\sin^3 x - \cos^3 x + 3\sin^2 x + 4\sin x - \cos x + 2 = 0 \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin^3 x + 3\sin^2 x + 3\sin x + 1\right) - \cos^3 x + \sin x - \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + 1\right)^3 - \cos^3 x + \left(\sin x + 1 - \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \cos x + 1\right)\left[\left(\sin x + 1\right)^2 + \cos x\left(\sin x + 1\right) + \cos^2 x + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x - \cos x + 1 = 0 & (1) \\ \left(\sin x + 1\right)^2 + \cos x\left(\sin x + 1\right) + \cos^2 x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z).$$

(2): Vì $\left(\sin x + 1\right)^2 + \cos x\left(\sin x + 1\right) + \cos^2 x + 1$

$= \left[\left(\sin x + 1\right) + \frac{1}{2}\cos x\right]^2 + \frac{3}{4}\cos^2 x + 1 > 0, \forall x \in R$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 2 họ nghiệm: $x = k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z)$.

5). $\sin 4x + 2\cos 2x + 4\left(\sin x + \cos x\right) = 1 + \cos 4x \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow 2\cos 2x\left(1 + \sin 2x\right) + 4\left(\sin x + \cos x\right) = 2\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1 + \sin 2x - \cos 2x\right) + 2\left(\sin x + \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin 2x + 2\sin^2 x\right) + 2\left(\sin x + \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos 2x\left(\sin x + \cos x\right) + \left(\sin x + \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \cos x\right)\left(\sin x.\cos 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0 & (1) \\ \sin x.\cos 2x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in Z\right).$$

$$(2) \Leftrightarrow -2\sin^3 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \sin x\right)\left(2\sin^2 x + 2\sin x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 2\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0 (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 họ nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{\pi}{2}+k2\pi.$

6). $\cos 3x-2\sin 2x-\cos x-\sin x-1=0\quad (*)$

$(*)\Leftrightarrow (\cos 3x-\cos x)-2\sin 2x-\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x.\sin x-2\sin 2x-\sin x-1=0\Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x+1)+(\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\sin 2x+1)=0\Leftrightarrow \sin x=-1$ hoặc $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,(k\in Z).$

Nghiệm phương trình $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,(k\in Z).$

7). $\sin 2x-\cos x2x+4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-4\cos x+1=0\quad (*)$

$(*)\Leftrightarrow \sin 2x+1-\cos 2x+4(\sin x+\cos x)-4\cos x=0\ \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\sin^2 x+4\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(\cos x+\sin x+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x+\sin x+2=0(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\pi$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=k\pi\quad (k\in Z).$

8). $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\quad (*)$

$\Leftrightarrow 2\sin x+2\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\cos x(\sin x-1)-2\sin^2 x+2\sin x=0$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\cos x(\sin x-1)-2\sin x(\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\sqrt{3}\cos x+\sin x)=0\Leftrightarrow \sin x-1=0$ hoặc $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in \text{¢}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in Z.$