5). $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$ (1). Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ 1+\tan x\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}-1=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}+\sin^2 x-\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\dfrac{\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}+\sin x(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\cos x(\cos x-\sin x)-\sin x(\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left(\dfrac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x-\sin x=0\vee \dfrac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x=0$

Với $\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ $\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $\dfrac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x=0\Leftrightarrow 1-\sin x\cos x+\sin^2 x=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1-\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=3\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

6). $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x$ (1) . Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x)\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$.

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x)\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$.

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x)\dfrac{\sin^2 x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$.

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3.\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin x}$.

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $\sin x=-2$ (vô nghiệm).

Với $\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$, so với điều kiện thỏa.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

7). $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ (1) (ĐH khối A 2005).

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos 6x}{2}.\cos 2x-\dfrac{1+\cos 2x}{2}=0\Leftrightarrow (1+\cos 6x)\cos 2x-(1+\cos 2x)=0$

$\cos 6x\cos 2x-1=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 8x)-1=0\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 8x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x+\cos 4x-3=0\Leftrightarrow \cos 4x=1\vee \cos 4x=-\frac{3}{2}$ (loại).

Với $\cos 4x=1\Leftrightarrow 4x=k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$

8). $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$ (1) (ĐH khối D 2005).

$(1)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\left[\sin 2x+\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 4x)-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow -\sin^2 2x+\sin 2x-\cos 4x-1=0$ $\Leftrightarrow -\sin^2 2x+\sin 2x-\left(1-2\sin^2 2x\right)-1=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0$ $\Leftrightarrow \sin 2x=1$ hoặc $\sin 2x=-2$ (loại).

Với $\sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

9). $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (ĐH khối A 2010).

Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ 1+\tan x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases},(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$.

$\Leftrightarrow \frac{\cos x(1+\sin x+\cos 2x)}{\sin x+\cos x}.\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$.

$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x=1\Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\vee \sin x=1$ (loại).

Với $\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

10). $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{8\sin 2x}$ (1) [Dự bị 2 ĐH02]

LỜI GIẢI

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}.\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{1}{8\sin 2x} \Leftrightarrow 8\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=20\cos 2x-5$

$\Leftrightarrow 8\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=20\cos 2x-5 \Leftrightarrow 8-4\left(1-\cos^2 2x\right)=20\cos 2x-5$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x-20\cos 2x+9=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$ (nhận) hoặc $\cos 2x=\frac{9}{2}$ (loại).

Với $\cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

11). $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$.[ĐH B03]

LỜI GIẢI

$\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$ (1)

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

$(1)\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x+4\sin^2 2x=2 \Leftrightarrow 2\cos 2x+4\left(1-\cos^2 2x\right)=2$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=1 \\ \cos 2x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=k\pi, x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

12). $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$ (1) [Dự bị 1 ĐH B03]

LỜI GIẢI

$(1)\Leftrightarrow 3\cos 4x-8\left(\cos^2 x\right)^3+2\cos^2 x+3=0$.

$\Leftrightarrow 3\left(2\cos^2 2x-1\right)-8\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3+\left(1+\cos 2x\right)+3=0$

Đặt $t=\cos 2x, t\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow 3\left(2t^2-1\right)-\left(1+t\right)^3+t+4=0 \Leftrightarrow t^3-3t^2+2t=0 \Leftrightarrow t=0\vee t=1\vee t=2$ (loại).

Với $t=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Với $t=1\Leftrightarrow \cos 2x=1\Leftrightarrow 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Kết luận nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x=k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

13). $\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$ [Dự bị 2 ĐH D03]

LỜI GIẢI

$\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$ (1)

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

$(1) \Leftrightarrow \cot x - \tan x = \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos 4x}{\sin x \cos x}$ $\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x$ $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \vee \cos 2x = 1$

Với $\cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

Với $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$