17. Tìm số nguyên dương n thỏa

$$(n+1)\left(C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n\right)=1023\ (1)$$

LỜI GIẢI

$$(1)\Leftrightarrow C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1023}{n+1}$$

Xét số hạng tổng quát: $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!}$

$$=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1},\ \forall k,0\le k\le n,k\in ¥\ .$$

Vậy $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$

Theo đề bài ta có:

$$\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)=\frac{1023}{n+1}\Leftrightarrow 2^{n+1}-1=1023\Leftrightarrow 2^{n+1}=1024\Leftrightarrow n+1=10\Leftrightarrow n=9$$

18. Khai triển nhị thức Niu tơn $P(x)=(1-6x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

Tính giá trị của biểu thức $T=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $2C_n^2-8C_n^1=n$.

LỜI GIẢI

$2C_n^2-8C_n^1=n\ (1)$. Điều kiện $n\ge 2,n\in ¥$

$$(1)\Leftrightarrow 2\frac{n!}{2!(n-2)!}-8\frac{n!}{(n-1)!}=n\Leftrightarrow n(n-1)-8n=n\Leftrightarrow n=10$$

Chọn $x=\frac{1}{2}$ thay vào P(x): $(1-3)^{10}=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{10}}{2^{10}}\Leftrightarrow T=2^{10}$

TÍNH TỔNG: DỰA VÀO CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU TƠN

DẠNG 1: TÍNH TỔNG DỰA VÀO CÔNG THỨC $(a+b)^n,(1+x)^n$

3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a). $S_1=2^nC_n^0+2^{n-2}C_n^2+2^{n-4}C_n^4+...+C_n^n$.

b). $S_2=2^{n-1}C_n^1+2^{n-3}C_n^3+2^{n-5}C_n^5+...+C_n^n$.

LỜI GIẢI

Ta có: $(2+1)^n=2^nC_n^0+2^{n-1}C_n^{n-1}+2^{n-2}C_n^{n-2}+2^{n-3}C_n^{n-3}+\cdots+C_n^n$ (1).

Ta có: $(2-1)^n=2^nC_n^0-2^{n-1}C_n^{n-1}+2^{n-2}C_n^{n-2}-2^{n-3}C_n^{n-3}+\cdots+(-1)^nC_n^n$ (2).

Suy ra

hoc360.net

•(1) + (2) ta được $S_1 = 2^n C_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + ... + C_n^n = \frac{3^n + 1}{2}$.

•(1) − (2) ta được $S_2 = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + ... + C_n^n = \frac{3^n - 1}{2}$.

6. Tính tổng : $S = C_{2012}^0 + 2C_{2012}^1 + 3C_{2012}^2 + 4C_{2012}^3 + \cdots + 2013C_{2012}^{2012}$

LỜI GIẢI

Ta có:

$$(k+1)C_{2012}^k = kC_{2012}^k + C_{2012}^k = k.\frac{2012!}{k!(2012-k)!} + C_{2012}^k = 2012\frac{2011!}{(k-1)!(2011-(k-1))!} + C_{2012}^k$$

$= 2012C_{2011}^{k-1} + C_{2012}^k \forall k = 0,1,2,...,2012$.

$$S = 2012\left(C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + \cdots + C_{2011}^{2011}\right) + \left(C_{2012}^0 + C_{2012}^1 + \cdots + C_{2012}^{2012}\right)$$

$$S = 2012(1+1)^{2011} + (1+1)^{2012} = 2012.2^{2011} + 2^{2012} = 1007.2^{2012}$$

7. Tính tổng $S = 1^2.C_{2013}^1 + 2^2.C_{2013}^2 + 3^2.C_{2013}^3 + ... + 2013^2.C_{2013}^{2013}$

LỜI GIẢI

Số hạng tổng quát là : $a_k = k^2.C_{2013}^k = k(k-1+1)C_{2013}^k \ \forall k = 2,3,...,2013$

$$a_k = k(k-1)C_{2013}^k + kC_{2013}^k = k(k-1).\frac{2013!}{k!(2013-k)!} + k.\frac{2013!}{k!(2013-k)!} \ \forall k = 2,3,...,2013$$

$a_k = 2012.2013C_{2011}^{k-2} + 2013C_{2011}^{k-1} \ \forall k = 2,3,...,2013$.

$$S_1 = 2012.2013\left(C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + C_{2011}^2 + ... + C_{2011}^{2011}\right) + 2013\left(C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + C_{2011}^2 + ... + C_{2012}^{2012}\right)$$

$$S_1 = 2012.2013(1+1)^{2011} + 2013(1+1)^{2012} = 2012.2013.2^{2011} + 2013.2^{2012} = 2013.2014.2^{2011}$$

8. Tính tổng $S = 1^2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + 3^2.C_n^3 + ... + n^2.C_n^n$

LỜI GIẢI

Áp dụng công thức: $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$, $\forall k = 2,3,4,...,n$ (đã chứng minh ở phần Chứng Minh đẳng thức

Ta có $\begin{cases} 1^2C_n^1 = 0 + nC_{n-1}^0 \\ 2^2C_n^2 = n(n-1)C_{n-2}^0 + nC_{n-1}^1 \\ ... \\ n^2C_n^n = n(n-1)C_{n-2}^{n-2} + nC_{n-1}^{n-1} \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được:

$$1^2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + 3^2.C_n^3 + ... + n^2.C_n^n = n(n-1)\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \cdots + C_{n-2}^{n-2}\right) + n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1^2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + 3^2.C_n^3 + ... + n^2.C_n^n = n(n-1).2^{n-2} + n.2^{n-1} = n(n+1).2^{n-2}$$

9. Tính tổng $S=\frac{C_{2013}^{0}}{1}+\frac{C_{2013}^{1}}{2}+\frac{C_{2013}^{2}}{3}+\cdots+\frac{C_{2013}^{2013}}{2014}$

LỜI GIẢI

Số hạng tổng quát của tổng là $a_k=\frac{C_{2013}^{k}}{k+1}\ \forall k=0,1,2,...,2013$

$$a_k=\frac{C_{2013}^{k}}{k+1}=\frac{2013!}{(k+1)k!(2013-k)!}=\frac{1}{2014}.\frac{2014!}{(k+1)!(2013-k)!}$$

$$=\frac{1}{2014}.\frac{2014!}{(k+1)!(2013-k)!}=\frac{1}{2014}.\frac{2014!}{(k+1)!(2014-(k+1))!}==\frac{C_{2014}^{k+1}}{2014}\quad \forall k=0,1,2,...,2013$$

Vậy ta được $a_k=\frac{C_{2014}^{k+1}}{2014}\ \forall k=0,1,2,...,2013$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2014}\left(C_{2014}^{1}+C_{2014}^{2}+\cdots+C_{2014}^{2014}\right)=\frac{1}{2014}\left[(1+1)^{2014}-C_{2014}^{0}\right]=\frac{2^{2014}-1}{2014}$$

10. Tính tổng $S=C_n^0+\frac{1}{2}.C_n^1+\frac{1}{3}.C_n^2+\cdots+\frac{1}{n}.C_n^{n-1}+\frac{1}{n+1}.C_n^n\ \left(n\in ¥ *\right)$

LỜI GIẢI

Xét số hạng tổng quát:

$$a_k=\frac{1}{k+1}.C_n^k=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)n!}{(k+1)k!.(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}\qquad=\frac{1}{n+1}.C_{n+1}^{k+1}.$$

Vậy $a_k=\frac{1}{k+1}.C_n^k=\frac{1}{n+1}.C_{n+1}^{k+1}$ (1).

Từ (1) ta có:

$$C_n^0=\frac{1}{n+1}.C_{n+1}^1;\ \frac{1}{2}C_n^1=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^2;\ \frac{1}{3}C_n^1=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^3;...;\ \frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$$

Vậy $S=\frac{1}{n+1}.C_{n+1}^1+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^2+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

$$=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\cdots+C_{n+1}^{k+1}\right)\Leftrightarrow(n+1).S=C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\cdots+C_{n+1}^{k+1}$$

$$(n+1).S+1=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\cdots+C_{n+1}^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow(n+1).S+1=2^{n+1}\Leftrightarrow S=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

11. Tính tổng $S=\frac{C_{12}^{12}}{11.12}+\frac{C_{13}^{12}}{12.13}+\frac{C_{14}^{12}}{13.14}+\cdots+\frac{C_{2013}^{12}}{2012.2013}+\frac{C_{2014}^{12}}{2013.2014}$

LỜI GIẢI

Ta có số hạng tổng quát:

$$\frac{C_n^{12}}{(n-1)n}=\frac{n!}{(n-1)n.12!(n-12)!}=\frac{(n-2)!}{12!(n-12)!}=\frac{1}{11.12}.\frac{(n-2)!}{10!.(n-2-10)!}=\frac{1}{11.12}.C_{n-2}^{10}$$

$\forall n=\overline{12,12,...,2014}$

Từ đó ta có $S=\frac{1}{11.12}\left(C_{10}^{10}+C_{11}^{10}+C_{12}^{10}+\cdots+C_{2011}^{10}+C_{2012}^{10}\right)$

Áp dụng công thức $C_h^{i-1}+C_h^i=C_{h+1}^i\forall i=\overline{1,h}$; $i,h\in ¥$ ta được

$S=\frac{1}{132}\left(C_{10}^{10}+C_{12}^{11}-C_{11}^{11}+C_{13}^{11}-C_{12}^{11}+\cdots+C_{2013}^{11}-C_{2012}^{11}\right)=\frac{1}{132}C_{2013}^{11}$

12. Tính tổng: $S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

LỜI GIẢI

Ta có $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{n!}{k!(k+1)(n-k)!}=\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ (3)

Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: $\frac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{(-1)^k kC_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng vế các đẳng thức trên ta có

$(n+1)(n+2)S=-C_{n+2}^3+2C_{n+2}^4-3C_{n+2}^5+...+(-1)^n nC_{n+2}^{n+2}$

$=-\left(C_{n+1}^2+C_{n+1}^3\right)+2\left(C_{n+1}^3+C_{n+1}^4\right)-3\left(C_{n+1}^4+C_{n+1}^5\right)+...+(-1)^n nC_{n+1}^{n+1}$

$=-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3-C_{n+1}^4+...+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}$

$=C_{n+1}^0-C_{n+1}^1-\left(C_{n+1}^0-C_{n+1}^1+C_{n+1}^2-C_{n+1}^3+C_{n+1}^4-C_{n+1}^5+...+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)$

$=1-(n+1)-(1-1)^{n-1}=-n$

Vậy $S=\frac{-n}{(n+1)(n+2)}$.

12. Tính tổng : T = $C_{50}^0-C_{50}^1+C_{50}^2-....+C_{50}^{24}-C_{50}^{25}$.

LỜI GIẢI

Ta có : $C_{50}^0-C_{50}^1+C_{50}^2-C_{50}^3+...-C_{50}^{49}+C_{50}^{50}=(1-1)^{50}=0$

Mà : $C_{50}^0=C_{50}^{50}$, $C_{50}^1=C_{50}^{49}$, ..., $C_{50}^{24}=C_{50}^{26}$

Suy ra : $2C_{50}^0-2C_{50}^1+2C_{50}^2-2C_{50}^3+...+2C_{50}^{24}-C_{50}^{25}=0$

$\Rightarrow\quad 2T+C_{50}^{25}=0\Rightarrow T=-\frac{C_{50}^{25}}{2}$.

13. (CĐ Công nghiệp HN 2003) Cho đa thức: $P(x)=(16x-15)^{2003}$. Khai triển đa thức đó dưới dạng: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2003}x^{2003}$. Tính tổng $S=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2003}$.

LỜI GIẢI

Ta có: $(16x-15)^{2003}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2003}x^{2003}$ (1)

Thay x = 1 vào (1) ta được: $(16.1 - 15)^{2003} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2003}$.

Kết luận $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2003} = 1$.

8. Tính tổng $S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + \dots + (n-1)n.C_n^n$ với $n \in N$ và $n > 2$.

LỜI GIẢI

Áp dụng công thức trên hai lần $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

$\Leftrightarrow (k-1)kC_n^k = (k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ suy ra $(k-1)kC_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

Như vậy:

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + \dots + (n-1)n.C_n^n$$

$$= n(n-1)\left[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + .. + C_{n-2}^{n-2}\right] = n(n-1)2^{n-2}$$

9. Tính tổng $S = \frac{1}{2!.2012!} + \frac{1}{4!.2010!} + \cdots + \frac{1}{2012!.2!} + \frac{1}{2014!}$

LỜI GIẢI

Ta có $2014!S = \frac{2014!}{2!.2012!} + \frac{2014!}{4!.2010!} + \cdots + \frac{2014!}{2012!.2!} + \frac{2014!}{2014!}$

Theo công thức tổ hợp ta có $2014!S = C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014}$

Xét khai triển:

$$(1+x)^{2014} = C_{2014}^0 + C_{2014}^1 x + C_{2014}^2 x^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} x^{2012} + C_{2014}^{2013} x^{2013} + C_{2014}^{2014} x^{2014}$$

Chọn $x = -1$ ta có $0 = C_{2014}^0 - C_{2014}^1 + C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} - C_{2014}^{2013} x^{2013} + C_{2014}^{2014}$

$$\Leftrightarrow C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014} = C_{2014}^1 + C_{2014}^3 + \cdots + C_{2014}^{2013} x^{2013}$$

$$\Rightarrow C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014} = \frac{1}{2}\left(C_{2014}^0 + C_{2014}^1 + \cdots + C_{2014}^{2013} x^{2013} + C_{2014}^{2014}\right)$$

$$\Leftrightarrow C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014} = \frac{1}{2}.2^{2014} = 2^{2013}$$

$$\Rightarrow C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014} = 2^{2013} - 1$$

Vậy $S = \frac{2^{2013} - 1}{2014!}$