Ví dụ 2 *: Tính các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$

b). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2-6x+5}-\sqrt[3]{3x^2-9x+7}}{(x-2)^2}$

c). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}$

LỜI GIẢI

Cách khử vô định $\dfrac{0}{0}$ dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[m]{g(x)}}{(x-x_0)^n}$ ta phải thêm và bớt một biểu thức $h(x)$ sao cho liên hợp thì tử xuất hiện một lượng nhân tử $(x-x_0)^n$ sau đó khử được vô định. Cách làm như sau:

$$L=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[m]{g(x)}}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(\sqrt[k]{f(x)}-h(x)\right)+\left(h(x)-\sqrt[m]{g(x)}\right)}{(x-x_0)^n}$$

$$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(\sqrt[k]{f(x)}-h(x)\right)}{(x-x_0)^n}+\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(h(x)-\sqrt[m]{g(x)}\right)}{(x-x_0)^n}=\dfrac{u(x)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n P(x)}+\dfrac{v(x)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n Q(x)}.$$

Trong đó $P(x)$ là lượng liên hợp của $\left(\sqrt[k]{f(x)}-h(x)\right)$ và $Q(x)$ là lượng liên hợp của $\left(h(x)-\sqrt[m]{g(x)}\right)$. Cụ thể qua những ví dụ các bạn sẽ hiểu rõ hơn.

a). Phân tích hướng giải, bước đầu tiên ta phải thêm một lượng $h(x)$ có nghĩa $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+4x}-h(x)\right)+\left(h(x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+4x}-h(x)\right)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(h(x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}.$$

Tính $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+4x}-h(x)\right)}{x^2}$, ta có $\sqrt{1+4x}-h(x)=\dfrac{\left(\sqrt{1+4x}-h(x)\right)\left(\sqrt{1+4x}+h(x)\right)}{\sqrt{1+4x}+h(x)}=\dfrac{1+4x-h^2(x)}{\sqrt{1+4x}+h(x)}$

như vậy ta phải tìm hàm $h(x)$ sao cho $h^2(x)$ phải xuất hiện $(1+4x)$. Ta phân tích

$1+4x+...=h^2(x)\Leftrightarrow 1+2.1.(2x)+(2x)^2=h^2(x)\Leftrightarrow(1+2x)^2=h^2(x)\Rightarrow h(x)=1+2x$. Đến đây bài toán xem như đã hoàn thành (vì phương pháp nhân lượng liên hợp các bạn đã thành thạo trong những ví dụ trên).

Cách làm cụ thể: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+4x}-(1+2x)\right)+\left((1+2x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+4x}-(1+2x)\right)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left((1+2x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}.$$

- Tính $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+4x}-(1+2x)\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+4x}-(1+2x)\right)\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}{x^2\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}\right)^2-(1+2x)^2}{x^2\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+4x-\left(1+4x+4x^2\right)}{x^2\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{x^2\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{\sqrt{1+4x}+(1+2x)}=-2\,.$$

● Tính $L_2=\lim_{x\to 0}\dfrac{\left((1+2x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+2x)-\sqrt[3]{1+6x}\right]\left[(1+2x)^2+(1+2x)\sqrt[3]{1+6x}+\left(\sqrt[3]{1+6x}\right)^2\right]}{x^2\underbrace{\left[(1+2x)^2+(1+2x)\sqrt[3]{1+6x}+\left(\sqrt[3]{1+6x}\right)^2\right]}_{A}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^3-\left(\sqrt[3]{1+6x}\right)^3}{x^2.A}=\lim_{x\to 0}\frac{1+6x+12x^2+8x^3-(1+6x)}{x^2.A}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2(3+2x)}{x^2.A}=\lim_{x\to 0}\frac{4(3+2x)}{A}=4$$

Do đó $L=L_1+L_2=-2+4=2$.

b). $L=\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2-6x+5}-\sqrt[3]{3x^2-9x+7}}{(x-2)^2}$. Để dễ thêm bớt ta nên đặt $x-2=t\Rightarrow x=t+2$ vì $x\to 2$

$\Rightarrow (x-2)\to 0$ do đó $t\to 0$. Suy ra $L=\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{2(t+2)^2-6(t+2)+5}-\sqrt[3]{3(t+2)^2-9(t+2)+7}}{t^2}$

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{2t^2+2t+1}-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}}{t^2}$ đến đây ta phải thêm và bớt một lượng $h(t)$ để trên tử phải xuất hiện

một lượng $t^2.u(t)$. Ta bắt đầu thực hiện $L=\lim_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-h(t)\right)+\left(h(t)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-h(t)\right)}{t^2}+\lim_{t\to 0}\frac{\left(h(t)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}.$$

Phân tích $L_1=\lim_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-h(t)\right)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-h(t)\right)\left(\sqrt{2t^2+2t+1}+h(t)\right)}{t^2.\left(\sqrt{2t^2+2t+1}+h(t)\right)}$

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{2t^2+2t+1-h^2(t)}{t^2.\left(\sqrt{2t^2+2t+1}+h(t)\right)}$ như vậy ta phải tìm hàm $h(t)$ sao cho $h^2(t)$ phải xuất hiện một lượng

$(2t+1)$. Ta thực hiện như sau: $...+2t+1=h^2(t)\Leftrightarrow t^2+2t+1=h^2(t)$ $\Leftrightarrow (t+1)^2=h^2(t)\Rightarrow h(t)=t+1$ mấu chốt của bài toán ta đã giải quyết xong. Ở đây vì sao ta lại lấy giới hạn đầu để phân tích? Thật ra lấy giới hạn nào cũng được vì thêm và bớt phải cùng một lượng $h(t)$, ta tìm được bớt lượng $h(t)$ ở giới hạn đầu thì giới hạn sau hiển nhiên phải nhận thêm lượng $h(t)$. Và tìm hàm $h(t)$ lấy giới hạn có căn thức bậc hai dễ nhân lượng liên hợp hơn.

Cách làm cụ thể ở bài này: $L=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-(t+1)\right)+\left((t+1)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-(t+1)\right)}{t^2}+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left((t+1)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}$.

● Tính $L_1=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-(t+1)\right)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{2t^2+2t+1}-(t+1)\right]\left[\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)\right]}{t^2\left[\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)\right]}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}\right)-(t+1)^2}{t^2\left[\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)\right]}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2\left[\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)\right]}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)}=\dfrac{1}{2}$

● Tính $L_2=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left((t+1)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}$

$$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left[(t+1)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right]\left[(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{3t^2+3t+1}+\left(\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)^2\right]}{t^2\underbrace{\left[(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{3t^2+3t+1}+\left(\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)^2\right]}_{A}}$$

$==\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t+1)^2-\left(\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)^3}{t^2.A}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^3}{t^2.A}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{A}=0$.

Kết luận $L=L_1+L_2=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$.

c). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$ .Tương tự câu a và b trước tiên ta phải tìm lượng $h(x)$. Có

$\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-h(x)=\dfrac{\left(\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-h(x)\right)\left(\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+h(x)\right)}{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+h(x)}$

$=\dfrac{8x^3+x^2+6x+9-h^2(x)}{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+h(x)}$ bài này tương đối dễ, ta thấy ngay $x^2+6x+9=(x+3)^2$ có nghĩa

$h^2(x)=(x+3)^2 \Rightarrow h(x)=(x+3)$. Cách làm cụ thể như sau:

$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)\right]+\left[(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}\right]}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)\right]}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}\right]}{x^3}$

● Tính $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)\right]}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)\right]\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+(x+3)\right]}{x^3\underbrace{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+(x+3)\right]}_{A}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^3+x^2+6x+9-(x+3)^2}{x^3.A} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^3}{x^3.A} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8}{A} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

● Tính $L_2 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}\right]}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-\left(9x^2+27x+27\right)}{x^3\underbrace{\left[(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{9x^2+27x+27}+\left(\sqrt[3]{9x^2+27x+27}\right)^2\right]}_{B}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^3.B} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{B} = \dfrac{1}{27}$.

Kết luận $L = L_1 + L_2 = \dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{27} = \dfrac{37}{27}$.

d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}$. Mẫu số được phân tích $x^3-x^2-x+1 = x^2(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^2-1)$

$=(x-1)^2(x+1)$, nên giới hạn được viết lại $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{(x-1)^2(x+1)}$. Đặt $t = x-1$ nên

$L = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{6(t+1)^2}-2\sqrt{t-1}}{t^2(t+2)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{6t^2+12t+6}-2\sqrt{t-1}}{t^2(t+2)}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-(x+1)+(x+1)-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-(x+1)}{x^3-x^2-x+1} + \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}$.