DẠNG 3: $\infty - \infty$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN: Nhân lượng liên hợp sau đó làm như dạng 1.

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ b). $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)$ c). $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

d). $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x)$ e). $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$

f). $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$ g). $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

LỜI GIẢI

a). $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)=+\infty$. Chú giải: Vì $x\to-\infty$ nên $x<0$ do đó $|x|=-x$.

b). $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2-x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{3}{2}$.

Chú thích: Do $x\to+\infty$ nên $x>0$ do đó $|x|=x$

c). $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(\frac{x^2+x}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{2}$.

Chú giải: Vì $x\to-\infty$ nên $x<0$ do đó $|x|=-x$.

d). $L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2}\right)}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)$.

Do $x\to+\infty$ nên $x>0$ do đó $|x|=x$. Có $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ nên $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)=2$ và $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

. Từ đó suy ra $L=+\infty$.

c). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right)}=0$

d). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+3-(x^2-3x+2)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

e). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+3-(x^2-3x+2)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Nhận xét: Nếu $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(ax)^{4k+2}+bx+c}-(ax)^{2k+1}\right)$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(ax)^{2k}+bx+c}+(ax)^{k}\right)$ (với $a>0,\ k\in\mathbb{N}$) ta tính trực tiếp không nhân lượng liên hợp.

Ví dụ 2: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^4+3x^2+1}-2x^2\right)$ b). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+1}-2x+1\right)$

LỜI GIẢI

a). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^4+3x^2+1}-2x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^4+3x^2+1-4x^4}{\sqrt{4x^4+3x^2+1}+2x^2}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^4\left(4+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}+2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+2}=\frac{3}{4}.$$

b). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+1}-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x^3+1-8x^3}{\left(\sqrt[3]{8x^3+1}\right)^2+\sqrt[3]{8x^3+1}.2x+4x^2}\right)+1$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{x^3}\right)^2}+x\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^3}}.2x+4x^2}\right)+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{x^3}\right)^2}+2x^2\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^3}}+4x^2}\right)+1$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{x^3}\right)^2}+2\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{x^3}\right)}+4\right)}\right)+1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2\left(4+4+4\right)}\right)+1$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{12x^2}\right)+1=1$$

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ DẠNG VÔ ĐỊNH $0.\infty$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Giả sử cần tìm giới hạn của hàm số $h(x)=f(x).g(x)$ khi $x\to x_0$ hoặc $x\to\pm\infty$ trong đó $f(x)\to 0$ và $g(x)\to\pm\infty$. Ta thường biến đổi theo các hướng sau:

Nếu $x\to x_0$ thì ta thường viết $f(x).g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ sẽ đưa về dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Nếu $x\to\pm\infty$ thì ta thường viết $f(x).g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ sẽ đưa về về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Tuy nhiên ở nhiều bài toán giới hạn loại này ta chỉ cần thực hiện một số biến đổi như đưa thừa số vào trong dấu căn thức, quy đồng mẫu số,... ta có thể đưa về giới hạn quen thuộc.

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{(x-3)^3}$ b). $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$

LỜI GIẢI

a). $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{(x-3)^3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{3x}.\dfrac{1}{(x-3)^3}=\lim\limits_{x\to3}-\dfrac{1}{3x(x-3)^2}=-\infty$.

a). $L=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^3+1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)(x^2-x+1)\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$

Vì $x\to-1^+\Rightarrow x>-1\Leftrightarrow x+1>0$.

Vậy $L=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-x+1)\sqrt{\dfrac{(x+1)^2x}{(x-1)(x+1)}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-x+1)\sqrt{\dfrac{(x+1)x}{x-1}}=3.0=0$

b). $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{|x|}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$