Câu 4: Định a và b để các hàm số sau liên tục tại x_0:

1). $f(x)=\begin{cases} a & x<1 \\ \dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5} & x>1 \\ b & x=1 \end{cases}$ tại $x_0=1$

2). $f(x)=\begin{cases} 1 & x=a \\ \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x>a \\ b-2x & x<a \end{cases}$ tại $x_0=a$

LỜI GIẢI

1). $f(x)=\begin{cases} a & x<1 \\ \dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5} & x>1 \\ b & x=1 \end{cases}$ tại $x_0=1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} a=a$ (a là hằng số)

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-5)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-5}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=b=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

2). $f(x)=\begin{cases} 1 & x=a \\ \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x>a \\ b-2x & x<a \end{cases}$ $x_0=a$

Ta có: $f(x_0)=f(a)=1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+} x+a=2a.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(b-2x)=b-2a$

Để hàm số liên tục tại $x_0=a$ thì $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\Leftrightarrow\begin{cases} 2a=1 \\ b-2a=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=2 \end{cases}.$

Câu 5 : Khảo sát tính liên tục của các hàm số sau :

a). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} & x>1 \\ x^2+x & x\le 1 \end{cases}$

b). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\ne 1 \\ 4 & \text{khi } x=1 \end{cases}$ c). $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} & x>1 \\ \cos(x-1) & x\le 1 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Tập xác định của f(x) là D = ¡

Với mọi $x_0 \in (1;+\infty)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{3x_0+1}-\sqrt{x_0+3}}{x_0-1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0 \in (-\infty;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (x^2+x) = x_0^2 + x_0 = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

o $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x+1-x-3}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-2}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3.1+1}+\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{2}$.

o $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2+x) = 1^2+1 = 2.$

o $f(1) = 2$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Vậy hàm số f(x) không liên tục tại $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên R.

b). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

• Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$

Có $f(1) = 3$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} (x^2+2) = 3$

Vậy có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3 \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 1$ (1).

Với mọi $x_0 \neq 1$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \dfrac{x_0^3-x_0^2+2x_0-2}{x_0-1} = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục ∨x ∈ ¡ \{1} (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên ¡ .

c). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} & x > 1 \\ \cos(x-1) & x \leq 1 \end{cases}$

Tập xác định của f(x) là D = ¡

Với mọi $x_0 \in (1;+\infty)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x_0+3}-\sqrt{3x_0+1}}{x_0-1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0 \in (-\infty;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \cos(x-1) = \cos(x_0-1) = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

o $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x+1-x-3}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-2}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3.1+1}+\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{2}.$

o $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2+x\right) = 1^2+1 = 2.$

o $f(1) = 2$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Vậy hàm số f(x) không liên tục tại $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên R.