DẠNG 6: u_n **được xác định bởi một công thức truy hồi.**

Phương pháp:

Tìm công thức tổng quát của u_n theo n, sau đó tìm $\lim u_n$.

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn (có nghĩa chứng minh dãy số tăng và bị chặn trên hoặc dãy số giảm và bị chặn dưới) sau đó dựa vào hệ thức truy hồi để tìm giới hạn.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2013 \\ u_{n+1} = \sqrt[n+1]{u_n^n + \dfrac{1}{2013^n}} \quad (n \ge 1) \end{cases}$

Tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn dãy số (u_n)?

LỜI GIẢI

Ta có $u_n > 0, \forall n \in N^*$ và $u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + \dfrac{1}{2013^n} \Rightarrow u_{n+1}^{n+1} - u_n^n = \dfrac{1}{2013^n}$

Do đó: $u_2^2 - u_1^1 = \dfrac{1}{2013^1}$

$u_3^3 - u_2^2 = \dfrac{1}{2013^2}$

...

$u_n^n - u_{n-1}^{n-1} = \dfrac{1}{2013^{n-1}}$

Suy ra: $u_n^n - u_1^1 = \dfrac{1}{2013^1} + \dfrac{1}{2013^2} + ... + \dfrac{1}{2013^{n-1}} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2013}\right)^{n-1}}{2012}$

Vậy $u_n = \sqrt[n]{2013 + \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2013}\right)^{n-1}}{2012}}$

$$1 < u_n = \sqrt[n]{2013 + \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2013}\right)^{n-1}}{2012}} < \sqrt[n]{2014} < \dfrac{\overbrace{1+1+...+1+2014}^{n}}{n} = 1 + \dfrac{2013}{n} \text{ (Cô si)}$$

Mặt khác $\lim\left(1 + \dfrac{2013}{n}\right) = 1$. Vậy $\lim u_n = 1$

Ví dụ 2 : Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 6 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Tìm $\lim \dfrac{u_n}{3.2^n}$.

LỜI GIẢI

Ta có

$u_0 = 1 = -4 + 5.2^0$

$u_1 = 6 = -4 + 5.2^1$

$u_2 = 16 = -4 + 5.2^2$

$u_3 = 36 = -4 + 5.2^3$

……….

$u_n = -4 + 5.2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Sử dụng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $u_n = -4 + 5.2^n, \forall n \in \mathbb{N}$ là số tổng quát của dãy số (u_n).

Do đó $\lim \dfrac{u_n}{3.2^n} = \lim \dfrac{-4+5.2^n}{3.2^n} = \lim \dfrac{-4.\dfrac{1}{2^n}+5}{3} = \dfrac{5}{3}$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^2}$.

LỜI GIẢI

Ta có $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$. suy ra $\{u_{n+2} - u_{n+1}\}$ lập thành một cấp số cộng có công sai bằng 1 nên $u_{n+2} - u_{n+1} = u_2 - u_1 + n.1 = n+2$ (1)

Từ (1) ta được $u_n - u_1 = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + ... + u_2 - u_1 = n + n - 1 + ... + 2$

$\Rightarrow u_n = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$.

DẠNG 7: DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC:

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = 3n^3 + 2n^2 - 2$ b). $u_n = -2n^4 + 3n^3 + n$ c). $u_n = \sqrt{\dfrac{4n^4 + 2n^3 + 1}{n^2 + 1}}$

d). $u_n = 4^n + 2.(-3)^{n+1}$ e). $u_n = n\cos\dfrac{n^2\pi}{10} - 4n^2$ f). $u_n = \dfrac{\sqrt{n^4 + 4n^2 - 1} - 2n^2}{\sqrt{n^3 + 3n} - 2n}$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $u_n = 3n^3 + 2n^2 - 2 = n^3\left(3 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^3}\right)$. Có $\lim \dfrac{2}{n} = 0, \lim \dfrac{2}{n^3} = 0$ nên $\lim\left(3 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^3}\right) = 3$ và $\lim n^3 = +\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n = +\infty$.

b). Ta có $u_n = -2n^4 + 3n^3 + n = n^4\left(-2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right)$. Vì $\lim \dfrac{3}{n} = 0, \lim \dfrac{1}{n^3} = 0$ nên $\lim\left(-2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right) = -2$ và $\lim n^4 = +\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n = -\infty$.

c). Ta có $u_n = \sqrt{\dfrac{4n^4+2n^3+1}{n^2+1}} = \sqrt{\dfrac{n^4\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^4}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}} = \sqrt{\dfrac{n^2\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^4}\right)}{1+\dfrac{1}{n^2}}} = n.\sqrt{\dfrac{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^4}}{1+\dfrac{1}{n^2}}}$. Vì $\lim\dfrac{2}{n}=0$,

$\lim\dfrac{1}{n^4}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$ nên $\lim\sqrt{\dfrac{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^4}}{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{\sqrt{4}}{1}=2$ và có $\lim n=+\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n=+\infty$.

d). Ta có $u_n = 4^n+2.(-3)^{n+1} = 4^n-6.(-3)^n = 4^n\left(1-6.\dfrac{(-3)^n}{4^n}\right) = 4^n\left[1-6\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$. Vì $\lim\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n=0$ nên

$\lim\left[1-6\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right]=1-6.0=1$ ngoài ra $\lim 4^n=+\infty$. Từ đó có $\lim u_n=+\infty$.

e). Ta có $u_n = n\cos\dfrac{n^2\pi}{10}-4n^2 = n^2\left(\dfrac{\cos\dfrac{n^2\pi}{10}}{n}-4\right)$. Vì $\left|\dfrac{\cos\dfrac{n^2\pi}{10}}{n}\right|\le\dfrac{1}{n}$ mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên $\lim\dfrac{\cos\dfrac{n^2\pi}{10}}{n}=0$ do

đó $\lim\left(\dfrac{\cos\dfrac{n^2\pi}{10}}{n}-4\right)=0-4=-4$ (1). Ngoài ra $\lim n^2=+\infty$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\lim u_n=-\infty$.

f). Ta có $u_n = \dfrac{\sqrt{n^4+4n^2-1}-2n^2}{\sqrt{n^3+3n}-2n} = \dfrac{\sqrt{n^4\left(\dfrac{n^4+4n^2-1}{n^4}\right)}-2n^2}{\sqrt{n^3\left(\dfrac{n^3+3n}{n^3}\right)}-2n} = \dfrac{n^2\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}}-2n^2}{n\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}-2n}$

$= \dfrac{n^2\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}}-2\right)}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}}-2\right)}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}}$. Ta có $\lim\dfrac{4}{n^2}=0$, $\lim\dfrac{1}{n^4}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$ và $\lim\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$

do đó $\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}}-2}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{1+0-0}-2}{\sqrt{1+0}-0}=-1$ (1). Ngoài ra có $\lim\sqrt{n}=+\infty$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\lim u_n=-\infty$.