Câu 14: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.
b). Chứng minh dãy số tăng.

LỜI GIẢI

a)Ta có: $u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3n - 2.$ Từ đó suy ra:

$u_1 = 5.$

$u_2 - u_1 = 3.1 - 2.$

$u_3 - u_2 = 3.2 - 2.$

$u_4 - u_3 = 3.3 - 2.$

....

$u_{n-1} - u_{n-2} = 3(n-2) - 2.$

$u_n - u_{n-1} = 3(n-1) - 2.$

Cộng từng vế của n đẳng thức trên và rút gọn, ta được:

$u_n = 5 + 3[1 + 2 + 3 + ... + (n-1)] - 2(n-1).$

$\Leftrightarrow u_n = 5 + \dfrac{3(n-1).n}{2} - 2(n-1) = 5 + \dfrac{3(n-1).n - 4(n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow u_n = 5 + \dfrac{(n-1)(3n-4)}{2}$

Vậy : $u_n = 5 + \dfrac{(n-1)(3n-4)}{2}.$

b) Ta có: $u_{n+1} - u_n = 3n - 2 > 0 \quad \forall n \geq 1.$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq 1.$ Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{9}\left(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}\right) \end{cases} \quad \forall n \in N^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số.

LỜI GIẢI

Đặt $x_n = \sqrt{1 + 2u_n} \quad \forall n \in N^*$

Ta có $x_n \geq 0$ và $x_n^2 = 1 + 2u_n, \forall n \in N^*$ hay $u_n = \dfrac{x_n^2 - 1}{2}$

Thay vào giả thiết, ta được: $\dfrac{x_{n+1}^2 - 1}{2} = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{x_n^2 - 1}{2} + 4 + 4x_n\right)$

$\Leftrightarrow 9x_{n+1}^2 - 9 = x_n^2 - 1 + 8 + 8x_n \Leftrightarrow (3x_{n+1})^2 = (x_n + 4)^2$

Suy ra: $3x_{n+1} = x_n + 4 \quad \forall n \in N^*$ (Do $x_n \geq 0$, $\forall n \in N^*$)

Hay $3^{n+1}x_{n+1} = 3^n x_n + 4.3^n$, $\forall n \in N^*$

Đặt $y_n = 3^n x_n$, $\forall n \in N^*$. Ta có: $y_{n+1} = y_n + 4.3^n$, $\forall n \in N^*$

Từ đó $y_{n+1} = y_1 + 4\left(3^n + 3^{n-1} + ... + 3\right)$, $\forall n \in N^*$

Hay $y_{n+1} = y_1 - 6 + 2.3^{n+1}$, $\forall n \in N^*$

Theo cách đặt ta có: $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 9 \Rightarrow y_n = 3 + 2.3^n$.

Suy ra: $x_n = 2 + \frac{1}{3^{n-1}}$, $\forall n \in N^*$

Do đó $u_n = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{4}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^{2n-2}}\right)$, $\forall n \in N^*$

Câu 16: Cho dãy (Un), (n = 0,1,2,3...) xác định bởi: $u_0 = 2$; $u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 - 60}$

a). Hãy xác định số hạng tổng quát của u_n.

b). Chứng minh rằng số $\frac{1}{5}(u_{2n} + 8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương của ba số nguyên liên tiếp.

LỜI GIẢI

a). Theo bài ra ta có: $u_{n+1}^2 - 8u_n u_{n+1} + u_n^2 + 60 = 0$ (1)

Thay n bởi (n – 1) ta được:

$u_n^2 - 8u_{n-1}u_n + u_{n-1}^2 + 60 = 0$ (2)

Trừ theo từng vế (1) cho (2) được:

$\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)\left(u_{n+1} - 8u_n + u_{n-1}\right) = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - 8u_n + u_{n-1} = 0$ (3)

(do $u_{n+1} > 4u_n > 16u_{n-1} \Rightarrow u_{n+1} - u_{n-1} > 0$

Phương trình đặc trưng của (3) là $t^2 - 8t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 - \sqrt{15} \\ t = 4 + \sqrt{15} \end{array}\right.$

Số hạng tổng quát: $u_n = \left(4 - \sqrt{15}\right)^n + \left(4 + \sqrt{15}\right)^n$

b). Với mỗi số $n \ge 1$, thì tồn tại số $k \in ¥$ để: $\left(4 + \sqrt{15}\right)^n - \left(4 - \sqrt{15}\right)^n = k\sqrt{15}$

Suy ra $\left(\left(4 + \sqrt{15}\right)^n - \left(4 - \sqrt{15}\right)^n\right)^2 = 15.k^2 \Leftrightarrow \left(4 + \sqrt{15}\right)^{2n} + \left(4 - \sqrt{15}\right)^{2n} = 15.k^2 + 2$

Do vậy: $\frac{1}{5}\left(u_{2n} + 8\right) = \frac{1}{5}\left(\left(4 + \sqrt{15}\right)^{2n} + \left(4 - \sqrt{15}\right)^{2n} + 8\right) = 3.k^2 + 2 = \left(k - 1\right)^2 + k^2 + \left(k + 1\right)^2$

Câu 17: Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a). $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n\left(n+1\right)}$ b). $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

c). $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}$ d). $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{n\left(n+3\right)}$

LỜI GIẢI

a). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in ¥^*$ nên $\left(u_n\right)$ bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k\left(k+1\right)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Suy ra $u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in ¥^*$ nên $\left(u_n\right)$ bị chặn trên.

Kết luận $\left(u_n\right)$ bị chặn.

b). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in ¥ *$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2, k \in ¥$. Do đó:

$u_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

c). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in ¥ *$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$. Suy ra

$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{1}{2}$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

c). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in ¥ *$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$. Suy ra $u_n = \frac{1}{3}[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$

$+\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)]$

$u_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) < \frac{11}{18}$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases} \quad \forall n \in N^*$

a). Chứng minh $u_n < 15, \forall n \in N^*$.

b). Chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn dưới

LỜI GIẢI

a). Ta có $u_1 = 1 < 15$, giả sử $u_k < 15$, khi đó $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + 5 < \frac{2}{3}.(15) + 5 = 15$

Vậy $u_n < 15 \forall, n \in N^* (1)$

b). Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 5 - u_n = \frac{15 - u_n}{3} > 0, \forall n \in N^* (do (1))$

$\Rightarrow$ dãy số (u_n) tăng $\Rightarrow u_n \geq u_1 = 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới.

Câu 19: Xét tính đơn điệu của dãy số (U_n) với $U_n = (0,3)^n.n; \forall n \in N^*$

LỜI GIẢI

$U_n = (0,3)^n.n$

$U_{n+1} - U_n = (0,3)^{n+1}.(n+1) - (0,3)^n.n = (0,3)^n\left[0,3(n+1) - n\right] = (0,3)^n\left[0,3 - (0,7)n\right] < 0; \forall n \in N^*$

$(\text{do } n \geq 1 \Rightarrow 0,3-(0,7)n \leq 0,3-0,7=-0,4<0 \Rightarrow (U_n)$ giảm

Câu 20: Cho $U_n = 1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+...+\frac{1}{n^5}\forall n\in N^*$. Chứng minh (U_n) bị chặn trên.

LỜI GIẢI

Với $k=2,3,...,n$ ta có $k^5 > k(k-1)>0$ (do $k^5-k(k-1)=k^2(k^3-1)+k>0$)

$$\Rightarrow \frac{1}{k^5}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

Do đó:

$1=1$

$\frac{1}{2^5}<1-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^5}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

....

$\frac{1}{n^5}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\Rightarrow U_n \leq 2-\frac{1}{n}<2\forall n\in N^* \Rightarrow (U_n)$ bị chặn trên

Câu 21: Cho $a>2$. Xét dãy (U_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a^2 \\ u_{n+1} = (u_n - a)^2 \ \forall n\in N^* \end{cases}$. Xét tính đơn điệu của dãy (U_n)

LỜI GIẢI

Ta có $u_1 = a^2 > 2a$ (do $a>2$)

Giả sử $u_k > 2a$ khi đó $u_k - a > a \Rightarrow u_{k+1} = (u_k-a)^2 > a^2 > 2a$. Vậy $u_n > 2a; \forall n\in N^*$

$u_{n+1}-u_n = (u_n-a)^2 - u_n = u_n^2-(2a+1)u_n + a^2$

$=(u_n-2a)(u_n-1)+(a^2-2a)>0;\forall n\in N^* \Rightarrow (u_n)$ đơn điệu tăng.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) định bởi: $u_n = \frac{a.n^4+2}{2n^4+5}; n\in N^*$. Định a để dãy số (u_n) tăng.

LỜI GIẢI

Ta có: $u_n = \frac{a.n^4+2}{2n^4+5} = \frac{a}{2}+\frac{4-5a}{2(2n^4+3)}; n\in N^*$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{4-5a}{2\left[2(n+1)^4+5\right]}-\frac{4-5a}{2\left[2n^4+5\right]}=\frac{4-5a}{2}\left[\frac{1}{2(n+1)^4+5}-\frac{1}{2n^4+5}\right]$$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n = \frac{4-5a}{2}\frac{2n^4+5-2(n+1)^4-5}{\left[2(n+1)^4+5\right]\left[2(n+1)^4+5\right]}$$

$$=(4-5a)\frac{n^4-(n+1)^4}{\left[2(n+1)^4+5\right]\left[2(n+1)^4+5\right]}$$

Mà: $\frac{n^4-(n+1)^4}{\left[2(n+1)^4+5\right]\left[2(n+1)^4+5\right]}<0;\forall n\in N^*$

Nên: (u_n) tăng $\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0;\forall n\in N^* \Leftrightarrow 4-5a<0 \Leftrightarrow a>\frac{4}{5}$

Câu 23: Cho dãy số (a_n) định bởi: $\begin{cases} 0<a_n<1;\forall n\in N^* \\ a_{n+1}(1-a_n)\ge \frac{1}{4};\forall n\in N^* \end{cases}$

a). Chứng minh: $a_n>\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\forall n\in N^*\,(1)$

b). Xét tính đơn điệu của dãy số (a_n) .

LỜI GIẢI

a). Ta có: $0<a_n<1 \Rightarrow a_1>0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2.1}:(1)$ đúng khi n=1

Giả sử (1) đúng khi n=k$\in N^*$, nghĩa là: $a_k>\frac{1}{2}-\frac{1}{2k};k\in N^*$

Ta cần chứng minh (1) đúng khi $n=k+1$, nghĩa là chứng minh: $a_{k+1}>\frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)};k\in N^*$

Ta có: $a_k>\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$

$\Rightarrow -a_k<-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k} \Rightarrow 1-a_k<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}=\frac{k+1}{2k} \Rightarrow \frac{1}{1-a_k}>\frac{2k}{k+1}$

Theo giả thiết: $a_{k+1}(1-a_k)\ge\frac{1}{4}$

$\Rightarrow a_{k+1}\ge\frac{1}{4(1-a_k)}>\frac{2k}{4(k+1)}=\frac{(2k+2)-2}{4(k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)}:(1)$ đúng khi $n=k+1$

Vậy: $a_n>\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\forall n\in N^*$.

b). Ta có: $a_n^2-a_n+\frac{1}{4}=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0 \Rightarrow a_n(a_n-1)+\frac{1}{4}\ge 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\ge a_n(1-a_n)$

Từ giả thiết suy ra : $a_{n+1}(1-a_n)\ge\frac{1}{4}\ge a_n(1-a_n) \Rightarrow a_{n+1}\ge a_n;\forall n\in N^*$

Vậy: (a_n) tăng.

Câu 24: Xét tính bị chặn của dãy số: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;n\in N^*$

LỜI GIẢI

Ta có: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>0;\forall n\in N^*$ nên (u_n) bị chặn dưới (1).

Lại có: $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}\right]$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}.\frac{(n-k+1)}{n}.\frac{(n-k+2)}{n}...\frac{(n-k+k)}{n}\right] \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}; n \in N^*$$

Mà: $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1).n}$

$= 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 3-\frac{1}{n} < 3; \forall n \in N^*$

Suy ra: $u_n < 3, \forall n \in N^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ dãy số (u_n) bị chặn.