Chứng minh khi $m \in (2;3)$ thì phương trình $2x^3 - 9x^2 + 12x - 2 - m = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2 - m$

Vì $m \in (2;3) \Leftrightarrow 2 < m < 3 \Rightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ m-3<0 \end{cases}$.

Ta có $f(0) = -2 - m < 2 - m < 0$, $f(1) = 3 - m > 0$, $f(2) = 2 - m < 0$, $f(3) = 7 - m > 0$. Từ đó có $\begin{cases} f(0).f(1) < 0 \\ f(1).f(2) < 0 \\ f(2).f(3) < 0 \end{cases}$ (1). Vì hàm số liên tục và xác định trên R nên hàm số liên tục trên các đoạn $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt lần lượt thuộc các khoảng $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$.

Cho α và β thỏa $0 < \alpha < \beta$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm :

$$\sin^{10} x - x = \frac{\alpha \sin^{10}\alpha + \beta \sin^{10}\beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}.$$

LỜI GIẢI

Đặt $f(x) = \sin^{10} x - x - \dfrac{\alpha \sin^{10}\alpha + \beta \sin^{10}\beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$. Có hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$ (1).

Ta có $f(\alpha) = \sin^{10}\alpha - \alpha - \dfrac{\alpha \sin^{10}\alpha + \beta \sin^{10}\beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$

$$= \frac{\alpha \sin^{10}\alpha - \alpha^2 + \beta \sin^{10}\alpha - \alpha\beta - \alpha \sin^{10}\alpha - \beta \sin^{10}\beta + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{\beta\left(\sin^{10}\alpha - \alpha - \sin^{10}\beta + \beta\right)}{\alpha + \beta}.$$

$$f(\beta) = \sin^{10}\beta - \beta - \frac{\alpha \sin^{10}\alpha + \beta \sin^{10}\beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{\alpha \sin^{10}\beta - \alpha\beta + \beta \sin^{10}\beta - \beta^2 - \alpha \sin^{10}\alpha - \beta \sin^{10}\beta + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} = -\frac{\alpha\left(\sin^{10}\alpha - \alpha - \sin^{10}\beta + \beta\right)}{\alpha + \beta}.$$

$$\Rightarrow f(\alpha).f(\beta) = -\frac{\alpha\beta\left(\sin^{10}\alpha - \alpha - \sin^{10}\beta + \beta\right)^2}{(\alpha + \beta)^2} < 0, \forall \alpha, \beta > 0 \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in [\alpha;\beta]$.

Chứng minh với mọi tham số m phương trình sau luôn có nghiệm thực : $\left(m^2-3m+5\right)x^3+2x-2=0$

LỜI GIẢI

Đặt $f\left(x\right)=\left(m^2-3m+5\right)x^3+2x-2$.

Ta có $f\left(0\right)=-2<0$ và $f\left(1\right)=m^2-3m+5=\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0,\forall m$ nên $f\left(0\right).f\left(1\right)<0$ (1). Vì hàm số f(x) xác định và liên tục trên R nên f(x) liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ (1). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;1\right)$.

Chứng minh rằng phương trình $\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ có ba nghiệm phân biệt với mọi giá trị của tham số m.

Đặt $f\left(x\right)=\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1$. Ta có :

$f\left(-3\right)=-27m^2-27-18m^2+12+m^2+1=-44m^2-14=-\left(44m^2+14\right)<0,\forall m\in\mathbb{R}$.

$f\left(0\right)=m^2+1>0$.

$f\left(1\right)=m^2+1-2m^2-4+m^2+1=-2<0$.

$f\left(2\right)=8\left(m^2+1\right)-8m^2-8+m^2+1=m^2+1>0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Từ đó ta có $\begin{cases} f\left(-3\right).f\left(0\right)<0 \\ f\left(0\right).f\left(1\right)<0 \\ f\left(1\right).f\left(2\right)<0 \end{cases}$ (1). Hàm số f(x) xác định và liên tục trên R do đó f(x) liên tục trên các đoạn $\left[-3;0\right],\left[0;1\right],\left[1,2\right]$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt lần lượt thuộc các khoảng $\left(-3;0\right),\left(0;1\right),\left(1;2\right)$.

Chứng minh phương trình $-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011=0$ có ít nhất 2 nghiệm với $\forall\ m,n,p\in R$.

Xét phương trình: $-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011=0$ (1)

Xét hàm số: $f(x)=-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011)=-\infty\Rightarrow\exists b>0$ sao cho $f\left(b\right)<0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4+mx^3+nx^2+px+2011)=-\infty\Rightarrow\exists a>0$ sao cho $f\left(a\right)<0$

$f\left(0\right)=2011>0$

Hàm số f(x) liên tục trên các đoạn $\left[a;0\right]$ và $\left[0;b\right]$

$\begin{cases} f(a).f(0) < 0 \\ f(0).f(b) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình có ít nhất 1 nghiệm $x_1 \in (a;0)$ và ít nhất 1 nghiệm $x_2 (0;b)$.

Vậy phương trình có ít nhất 2 nghiệm.

Cho phương trình: $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$
a). Với $d<0$ chứng minh rằng phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt.
b). Với $d=1$, giả sử phương trình có nghiệm, chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge\frac{4}{3}$

LỜI GIẢI
a)
Đặt $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ liên tục trên R.
Ta có: $f(0)=d<0$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, nên tồn tại 2 số $\alpha<0$ và $\beta>0$ sao cho $f(\alpha)>0,\ f(\beta)>0$. Do đó $\begin{cases} f(0).f(\alpha)<0 \\ f(0).f(\beta)<0 \end{cases}$.

Vậy phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc hai khoảng $(\alpha,0)$ và $(0,\beta)$.
b). $d=1$ Gọi x_0 là nghiệm của phương trình ($x_0\ne 0$)

$$x_0^4+ax_0^3+bx_0^2+cx_0+1=0 \Leftrightarrow b=-x_0^2+\frac{-1}{x_0^2}-ax_0-c\frac{1}{x_0}$$

Ta có: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+1\right)=\left[a^2+c^2+\left(-x_0^2+\frac{-1}{x_0^2}-ax_0-c\frac{1}{x_0}\right)^2\right]\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+1\right)$

$$\ge\left(ax_0+c\frac{1}{x_0}-x_0^2+\frac{-1}{x_0^2}-ax_0-c\frac{1}{x_0}\right)^2=\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\right)^2$$

Suy ra: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\dfrac{\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\right)^2}{x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+1}=\dfrac{t^2}{t+1}$ với $t=x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\ge 2$

Mặt khác: $\frac{t^2}{t+1}\ge\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3t^2-4t-4\ge 0\Leftrightarrow (t-2)(3t+2)\ge 0$ (đúng do $t\ge 2$).

Vậy $a^2+b^2+c^2\ge\frac{4}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=-\frac{2}{3}$ (ứng với $x_0=1$).

$a=c=\frac{2}{3}, b=-\frac{2}{3}$ (ứng với $x_0=-1$).

Cho ba số a, b, c thoả mãn hệ thức $2a+3b+6c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

- $f(0)=c$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}a+\frac{2}{3}b+c=\frac{1}{9}(4a+6b+12c)-\frac{c}{3}=-\frac{c}{3}$.

• Nếu $c = 0$ thì $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ $\Rightarrow$ phương trình đã cho có nghiệm $\frac{2}{3} \in (0;1)$

• Nếu $c \neq 0$ thì $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{c^2}{3} < 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có nghiệm $\alpha \in \left(0;\frac{2}{3}\right) \subset (0;1)$.

Kết luận phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).