7). $2^n > n^2, \forall n \ge 5, n \in \mathbb{N}$

Với $n = 5$ ta có $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 5$.

Giả sử với $n = k, k \ge 5$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $2^k > k^2$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh: $2^{k+1} > (k+1)^2$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2 ta được: $2.2^k > 2k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k^2 + k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$ (đúng), vì $k^2 > 2k+1 \ \forall k \ge 5$

Vậy (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \ge 5$.

**Câu 4:** Chứng minh $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ luôn là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

LỜI GIẢI

Đặt $u_n = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$

Với $n = 1$ thì $u_1 = \frac{1^5}{5} + \frac{1^4}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1}{30} = 1 \Rightarrow u_1$ là số nguyên (đúng).

Giả sử với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$ thì $u_k = \frac{k^5}{5} + \frac{k^4}{2} + \frac{k^3}{3} - \frac{k}{30}$ là một số nguyên.

Ta cần chứng minh với $n = k+1$ thì $u_{k+1} = \frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^4}{2} + \frac{(k+1)^3}{3} - \frac{(k+1)}{30}$ cũng là một số nguyên.

Thật vậy : $u_{k+1} = \frac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5}$

$+ \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{2} + \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} - \frac{k+1}{30}$.

$u_{k+1} = \frac{k^5}{5} + \frac{k^4}{2} + \frac{k^3}{3} - \frac{k}{30} + \frac{5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k}{5} + \frac{4k^3 + 6k^2 + 4k}{2} + \frac{3k^2 + 3k}{3} + 1$

$u_{k+1} = u_k + \left(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right)$. Vì $u_k$ là số nguyên và $\left(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right)$ số nguyên nên $u_{k+1}$ là số nguyên. Kết luận theo nguyên lí quy nạp thì $u_n$ là số nguyên.

**Câu 5:** Cho $x \in R \setminus \{0\}$ và $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh: $x^n + \frac{1}{x^n}$ là số nguyên với mọi $n \in N^*$

LỜI GIẢI

Đặt $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$

Ta có: $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên và $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ là số nguyên.

Giả sử: $u_k = x^k + \frac{1}{x^k}$ là số nguyên với $k \in N^*$.

Ta phải chứng minh $u_{k+1} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ cũng là số nguyên

Thật vậy ta có $\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+1} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k+1}}$

$\Rightarrow x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$. Vì $\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)$ và $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ là các số nguyên nên $\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$ là số nguyên, hiển nhiên $\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$ là số nguyên.

Từ đó suy ra $u_{k+1}=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ là số nguyên.

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $x^n+\frac{1}{x^n}$ là số nguyên với mọi $n\in N^*$.