Cho CSN (u_n) và các số nguyên dương $m,k\left(m<k\right)$.

Chứng minh rằng: $u_{k-m}u_{k+m}=u_k^2$

LỜI GIẢI

Có $u_{k-m}u_{k+m}=u_1.q^{k-m-1}.u_1.q^{k+m-1}=u_1^2.q^{2k-2}=\left(u_1.q^{k-1}\right)^2=u_k^2$ (đpcm).

Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân. Chứng minh rằng: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$

LỜI GIẢI

Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân.

- Gọi q là công bội của cấp số nhân ta có $b=aq,\ c=aq^2$
- $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(a^2+a^2q^2)(a^2q^2+a^2q^4)=a^4q^2(1+q^2)^2$ (1)
- $(ab+bc)^2=(a.aq+aq.aq^2)^2=a^4q^2(1+q^2)^2$ (2)
- Từ (1) và (2) ta suy ra $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$.

Cho a, b, c là CSC thỏa $a+b+c=\frac{3\pi}{4}$. Chứng minh $\tan a,\tan b,\tan c$ theo thứ tự đó lập thành CSN.

LỜI GIẢI

Ta có $a+c=2b$ tính chất của CSC. Có $a+b+c=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow 3b=\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow b=\frac{\pi}{4}$. Suy ra $a+c=\frac{\pi}{2}$

Ta có $\tan a.\tan c=\tan a.\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\tan a.\cot a=1=\tan^2\frac{\pi}{4}=\tan^2 b$

Vậy $\tan a.\tan c=\tan^2 b\Rightarrow$ $\tan a,\tan b,\tan c$ theo thứ tự đó lập thành CSN.

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases}u_4-u_2=72\\u_5-u_3=144\end{cases}$ b) $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\u_1+u_7=325\end{cases}$ c) $\begin{cases}u_3+u_5=90\\u_2-u_6=240\end{cases}$

d) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=14\\u_1.u_2.u_3=64\end{cases}$ e) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=21\\\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{7}{12}\end{cases}$ f) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=30\\u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=340\end{cases}$

LỜI GIẢI

a) $\begin{cases}u_4-u_2=72\\u_5-u_3=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^3-u_1q=72\\u_1q^4-u_1q^2=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q\left(q^2-1\right)=72 & (1)\\u_1q^2\left(q^2-1\right)=144 & (2)\end{cases}$

Lấy (2):(1) được: $q=2$, thay $q=2$ vào (1) được $u_1=12$

c) $\begin{cases}u_3+u_5=90\\u_2-u_6=240\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^2+u_1q^4=90\\u_1q-u_1q^5=240\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^2\left(1+q^2\right)=90 & (1)\\u_1q\left(1-q^4\right)=240 & (2)\end{cases}$

Lấy $\frac{(2)}{(1)}\Leftrightarrow\frac{u_1q\left(1-q^4\right)}{u_1q^2\left(1+q^2\right)}=\frac{240}{90}\Leftrightarrow\frac{\left(1-q^2\right)\left(1+q^2\right)}{q\left(1+q^2\right)}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{1-q^2}{q}=\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 3q^2+8q-3=0\Leftrightarrow q=\frac{1}{3}\vee q=-3$

Với $q=\frac{1}{3}$ thay vào (1) được $u_1=729$.

Với $q=-3$ thay vào (1) được $u_1=1$.

d) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_1.u_2.u_3=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=14 \\ u_1u_1qu_1q^2=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=14 & (1) \\ \left(u_1q\right)^3=64 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow u_1q=4 \Rightarrow u_1=\dfrac{4}{q}$, thay vào (1) được $\dfrac{4}{q}\left(1+q+q^2\right)=14$

$\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}$

Với $q=2 \Rightarrow u_1=2$. Với $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1=8$.

e) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}=\dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=21 \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_1q}+\dfrac{1}{u_1q^2}=\dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=21 & (1) \\ \dfrac{q^2+q+1}{u_1q^2}=\dfrac{7}{12} & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow 1+q+q^2=\dfrac{21}{u_1}$, thay vào (2): $\dfrac{21}{u_1}\cdot\dfrac{1}{u_1q^2}=\dfrac{7}{12} \Leftrightarrow \left(u_1q\right)^2=36 \Leftrightarrow u_1q=\pm 6$

Với $u_1=\dfrac{6}{q}$ thay vào (1): $\dfrac{6}{q}\left(1+q+q^2\right)=21 \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}$

Nếu $q=2 \Rightarrow u_1=3$. Nếu $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1=12$

Với $u_1=-\dfrac{6}{q}$ thay vào (1): $-\dfrac{6}{q}\left(1+q+q^2\right)=21 \Leftrightarrow 2q^2+9q+2=0 \Leftrightarrow q=\dfrac{-9+\sqrt{65}}{4} \vee q=\dfrac{-9-\sqrt{65}}{4}$

Nếu $q=\dfrac{-9+\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1=\dfrac{27+3\sqrt{65}}{2}$. Nếu $q=\dfrac{-9-\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1=\dfrac{27-3\sqrt{65}}{2}$

f) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=30 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3=30 \\ u_1^2+u_1^2q^2+u_1^2q^4+u_1^2q^6=340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=30 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q\right)\left(1+q^2\right)=30 \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right)=340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2\left(1+q\right)^2\left(1+q^2\right)^2=900 & (1) \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right)=340 & (2) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{\left(1+q\right)^2\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\dfrac{45}{17}$, quy đồng rút gọn được: $14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0$

$\Leftrightarrow 14q^2-17q-17-\dfrac{17}{q}+\dfrac{14}{q^2}=0$

$\Leftrightarrow 14\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)-17\left(q+\dfrac{1}{q}\right)-17=0$. Đặt $t=q+\dfrac{1}{q}$, điều kiện $|t|\ge 2$

$\Leftrightarrow 14t^2-17t-45=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2} \vee t=-\dfrac{9}{7}$ (loại).

Với $t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}$

Với $q=2 \Rightarrow u_1=2$. Với $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1=16$

a). Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.
b). Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

a). Có nghĩa ta được cấp số nhân có sáu số hạng với số hạng đầu là 160 và số hạng cuối là 5

Ta có $\begin{cases} u_1 = 160 \\ u_6 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 160 \\ u_1q^5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 160 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy 4 số hạng cần thêm vào $u_2 = u_1q = 80,\ u_3 = u_2q = 40,\ u_4 = u_3q = 20,\ u_5 = u_4q = 10$

b). Có nghĩa ta được cấp số nhân có sáu số hạng với số hạng đầu là 243 và số hạng cuối là 1

Ta có $\begin{cases} u_1 = 243 \\ u_6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 243 \\ u_1q^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 243 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

LỜI GIẢI

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1, u_2, u_3 với công bội là q. Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 19 \\ u_1.u_2.u_3 = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 19 \\ \left(u_1q\right)^3 = 6^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 + q + q^2\right) = 19 \quad (*) \\ u_1q = 6 \Rightarrow u_1 = \dfrac{6}{q} \end{cases}$$

Thay $u_1 = \dfrac{6}{q}$ vào $(*)$ được: $6q^2 - 13q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{3}{2}$ hoặc $q = \dfrac{2}{3}$.

Với $q = \dfrac{3}{2} \Rightarrow u_1 = 4, u_2 = 6, u_3 = 9$.

Với $q = \dfrac{2}{3} \Rightarrow u_1 = 9, u_2 = 6, u_3 = 4$.

b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có $\begin{cases} S_n = 889 \\ u_n = 448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} = 889 \\ u_1q^{n-1} = 448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^n - u_1 = 889(q - 1) & (1) \\ u_1q^n = 448q & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) được: $448q - 7 = 889q - 889 \Leftrightarrow q = 2$

Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1 - u_2 = 35 \\ u_3 - u_4 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q = 35 \\ u_1q^2 - u_1q^3 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q) = 35 & (1) \\ u_1q^2(1 - q) = 560 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2 = 16 \Leftrightarrow q = \pm 4$

Với $q = 4$ thay vào (1) được $u_1 = -\dfrac{35}{3}, u_2 = u_1q = -\dfrac{140}{3},\ u_3 = -\dfrac{560}{3},\ u_3 = -\dfrac{2240}{3}$

Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2$, ab + 5, $(a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Theo tính chất của CSC ta có: $a+(2a+b)=2(a+2b)$ (1)

Theo tính chất của CSN ta có: $(b+1)^2(a+1)^2=(ab+5)^2$ (2)

Từ (1) khai triển rút gọn ta được: $a=3b$, thay vào (2):

$(b+1)^2(3b+1)^2=(3b^2+5)^2 \Leftrightarrow (b+1)(3b+1)=\pm(3b^2+5)$

Với $\left(b+1\right)\left(3b+1\right)=3b^2+5 \Leftrightarrow b=1 \Rightarrow a=3$

Với $\left(b+1\right)\left(3b+1\right)=-3b^2-5 \Leftrightarrow 6b^2+4b+6=0$ (vô nghiệm).

Kết luận $a=3, b=1$