Câu 19: Cho cấp số cộng :a,b,c. CMR: $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}};\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},(a>0;b>0;c>0)$ theo thứ tự đó cũng lập thành CSC.

LỜI GIẢI

Vì a, b, c lập thành CSC, ta có $a+c=2b$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

Ta có: $a+c=2b\Leftrightarrow a-b=b-c\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\quad\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$

$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\quad\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}};\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ Theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng.

Câu 20: Trong một cấp số cộng, đặt: $S_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_k$

a). Biết $S_m=n$ và $S_n=m$ (với $m\neq n$). Hãy tính S_{m+n}.

b). Biết $S_m=S_n$ (với $m\neq n$). Hãy tính S_{m+n}

LỜI GIẢI

a). $S_m=n\Leftrightarrow\frac{m\left[2u_1+(m-1)d\right]}{2}=n\Leftrightarrow 2mu_1+\left(m^2-m\right)d=2n\ (1)$

Tương tự $S_n=m$ ta có: $2nu_1+\left(n^2-n\right)d=2m\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $2u_1(m-n)+\left[\left(m^2-n^2\right)-(m-n)\right]d=-(m-n)$

Do $m\neq n$ nên:

$2u_1+(m+n-1)d=-2\Leftrightarrow(m+n-1)d=-2-2u_1$

Mặt khác ta có: $S_{m+n}=\frac{(m+n)\left[2u_1+(m+n-1)d\right]}{2}$

Thay kết quả trên vào biểu thức của S_{m+n} ta được:

$S_{m+n}=\frac{(m+n)(2u_1-2-2u_1)}{2}=-(m+n)$

b). $S_m=S_n\Leftrightarrow m\left[2u_1+(m-1)d\right]=n\left[2u_1+(n-1)d\right]$

$\Leftrightarrow 2u_1(m-n)+\left[\left(m^2-n^2\right)-(m-n)d\right]=0\Leftrightarrow 2u_1+(m+n-1)d=0\ (\text{do } m\neq n)$

Thay vào biểu thức của S_{m+n} được: $S_{m+n}=0$.

Câu 21: Cho cấp số cộng $u_1,u_2,...,u_n,...$ với công sai $d\neq0$ và tất cả các số hạng đều dương. Chứng minh:

$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}$

LỜI GIẢI

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{u_{k-1}}+\sqrt{u_k}}=\dfrac{\sqrt{u_k}-\sqrt{u_{k-1}}}{u_k-u_{k-1}}=\dfrac{1}{d}\left(\sqrt{u_k}-\sqrt{u_{k-1}}\right),\left(\forall k=2,3,\ldots,n\right)$

$$VT=\frac{1}{d}\left(\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}+\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}+\cdots+\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{u_{n-2}}+\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}\right)=\frac{1}{d}\frac{u_n-u_1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}$$ (đpcm).

Câu 22: Một cấp số cộng có tính chất với mọi số nguyên dương m và n khác nhau, có các tổng S_m và S_n thỏa hệ thức: $\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{m^2}{n^2}$. Chứng minh: $\dfrac{u_m}{u_n}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$

LỜI GIẢI

$$\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}\Leftrightarrow\frac{m\left[2u_1+\left(m-1\right)d\right]}{n\left[2u_1+\left(n-1\right)d\right]}=\frac{m^2}{n^2}\Leftrightarrow\frac{2u_1+\left(m-1\right)d}{2u_1+\left(n-1\right)d}=\frac{m}{n}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2u_1+\left(m-1\right)d}{m}=\frac{2u_1+\left(n-1\right)d}{n}=\frac{\left[2u_1+\left(m-1\right)d\right]-\left[2u_1+\left(n-1\right)d\right]}{m-n}=d$$

$$\Rightarrow d=2u_1$$

Ta có $\dfrac{u_m}{u_n}=\dfrac{u_1+\left(m-1\right)d}{u_1+\left(n-1\right)d}=\dfrac{u_1+\left(m-1\right)2u_1}{u_1+\left(n-1\right)2u_1}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$ (đpcm)

Câu 23: Cho tam giác ABC có $\tan\dfrac{A}{2},\tan\dfrac{B}{2},\tan\dfrac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A,\cos B,\cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

LỜI GIẢI

Ta có: $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=2\tan\dfrac{B}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=2.\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{B}{2}=2.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\right].\sin\frac{B}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}.\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{B}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}.\cos\frac{A+C}{2}+\sin^2\frac{B}{2}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos B}{2}=\dfrac{1}{2}\left[\cos(-C)+\cos A\right]+\dfrac{1-\cos B}{2}$

$\Leftrightarrow 1+\cos B=\cos C+\cos A+1-\cos B \Leftrightarrow \cos A+\cos C=2\cos B.$

$\Rightarrow \cos A,\cos B,\cos C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Câu 24: Cho ΔABC có $\cot\dfrac{A}{2},\cot\dfrac{B}{2},\cot\dfrac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh: Ba cạnh a,b,c theo thứ tự cũng tạo thành một cấp số cộng.

LỜI GIẢI

Ta có: $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=2\cot\dfrac{B}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=2.\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}=2\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}=2.\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=2.\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{B}{2}=2.\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin B=\left[\cos\left(\dfrac{A}{2}-\dfrac{C}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{C}{2}\right)\right].\cos\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin B=\cos\left(\dfrac{A}{2}-\dfrac{C}{2}\right).\cos\dfrac{B}{2}-\sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin B=\cos\left(\dfrac{A}{2}-\dfrac{C}{2}\right).\sin\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{C}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\sin B$

$\Leftrightarrow \sin B=\dfrac{1}{2}(\sin A+\sin C) \Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C \Leftrightarrow 2.\dfrac{b}{2R}=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{c}{2R} \Leftrightarrow a+c=2b$

$\Rightarrow$ Ba cạnh của Δ tạo thành cấp số cộng.

Câu 25: Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì ba số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, với: $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$.

LỜI GIẢI

a, b, c là cấp số cộng nên $a+c=2b$

Ta có $2y=2b^2-2ca, x+z=a^2+c^2-b(a+c)$

$\Rightarrow x+z=(a+c)^2-2ac-2b^2=4b^2-2ac-2b^2=2b^2-2ac=2y$ (đpcm)

Câu 26: Tính các tổng sau:

a). $S=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$

b). $S=1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3n+1)+(3n+4)$

c). $S=100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$

LỜI GIẢI

a). Ta có dãy số $1,3,5,\cdots,(2n-1),(2n+1)$ là cấp số cộng với công sai $d=2$ và $u_1=1$, số hạng tổng quát $u_m=2n+1$. Do đó có $2n+1=u_1+(m-1)d \Leftrightarrow 2n+1=1+(m-1).2 \Rightarrow m=n+1$.

Vậy $S_{n+1}=\dfrac{(n+1)(2u_1+nd)}{2}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{2}$.

b). Ta có dãy số $1,4,7,\cdots,(3n-2),(3n+1),(3n+4)$ là cấp số cộng với công sai $d=3$ và $u_1=1$, số hạng tổng quát $u_m=3n+4$. Do đó có: $3n+4=u_1+(m-1)d \Leftrightarrow 3n+4=1+(m-1).3 \Rightarrow m=n+2$

Vậy $S_{n+2}=\dfrac{m(2u_1+(m-1)d)}{2}=\dfrac{(n+2)\left[2+(n+1)3\right]}{2}=\dfrac{(n+2)(3n+5)}{2}$.

c). $S=100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$

$=(100-99)(100+99)+(98-97)(98+97)+...+(2-1)(2+1)$

$=199+195+...+3$

Ta có dãy số $3,7,...,195,199$ là cấp số cộng với công sai $d=4$, số hạng đầu tiên $u_1=3$ và số hạng n là $u_n=199$.

Do đó có $199=3+(n-1).4 \Rightarrow n=50$.

Vậy $S=\dfrac{50(2.3+49.4)}{2}=5050$.

Câu 27: Cho cấp số cộng: $a_1;a_2;...$ có công sai d.CMR: a). $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$ b). $S_{4n}-S_{2n}=\frac{1}{3}S_{6n}$ c). $S_{n+3}+3S_{n+1}=3S_{n+2}+S_n$ d). $2(S_{3n}-S_n)=S_{4n}$ e). $u_n=\frac{1}{2}(u_{n-k}+u_{n+k}),\forall n>k$

LỜI GIẢI

Ta có: $S_{3n}=\dfrac{3n}{2}\left[2u_1+(3n-1)d\right]$ (1)

Ta có: $3(S_{2n}-S_n)=3\left\{\dfrac{2n}{2}\left[2u_1+(2n-1)d\right]-\dfrac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]\right\}$

$=3.\dfrac{n}{2}\left[4u_1+(4n-2)d-(2u_1+(n-1)d)\right]=\dfrac{3n}{2}\left[2u_1+(3n-1)d\right]$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$

b). $S_{4n}-S_{2n}=\dfrac{1}{3}S_{6n}$

Ta có $S_{4n}-S_{2n}=\dfrac{4n\left[2a_1+(4n-1)d\right]}{2}-\dfrac{2n\left[2a_1+(2n-1)d\right]}{2}$

$=n(4a_1+8nd-2d-2a_1-2nd+d)=n\left[2a_1+(6n-1)d\right]$ (1)

Và $\dfrac{1}{3}S_{6n}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{6n\left[2a_1+(6n-1)d\right]}{2}=n\left[2a_1+(6n-1)d\right]$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{4n}-S_{2n}=\dfrac{1}{3}S_{6n}$.

c), d). Sử dụng công thức tính tổng khai triển hai vế, cách giải hoàn toàn tương tự câu b).

e). $u_n=\dfrac{1}{2}(u_{n-k}+u_{n+k}),\forall n>k$

có $\dfrac{1}{2}(u_{n-k}+u_{k+1})=\dfrac{1}{2}\left[u_1+(n-k-1)d+u_1+(n+k-1)d\right]=u_1+(n-1)d=u_n$ (đpcm).

Câu 28: Cho dãy số (u_n) định bởi : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-u_n}; n \in N^* \end{cases}$

a). Chứng minh rằng: $u_n < 0, \forall n \in N^*$

b). Đặt $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n}, n \in N^*$. Chứng minh rằng (v_n) là một cấp số cộng.

c). Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n theo $n, n \in N^*$

LỜI GIẢI

a). Ta có: $u_1 = -2 < 0.$ Giả sử $u_k < 0 \Rightarrow u_{k+1} = \dfrac{u_k}{1-u_k} < 0, k \in N^*$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $u_n < 0, \forall n \in N^*$

b).Ta có: $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} =$

$\dfrac{1}{\frac{u_n}{1-u_n}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1-u_n-1}{u_n} = -1, \forall n \in N^*$

Vậy (v_n) là 1 cấp số cộng với công sai $d = -1$

c). (v_n) là cấp số cộng với công sai $d = -1$,

$v_1 = \dfrac{u_1 + 1}{u_1} = \dfrac{-2+1}{-2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow v_n = \dfrac{1}{2} + (n-1)(-1) = -n + \dfrac{3}{2}, \forall n \in N^*$

$v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n - 1} = \dfrac{1}{-n + \frac{3}{2} - 1} = \dfrac{2}{1-2n}, \forall n \in N^*$

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} + 3, \forall n \ge 2$

Chứng minh rằng dãy số $v_n = 2u_n - u_{n-1}$ là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu tiên và công sai của (v_n)