

Do đó  $m < 0$  v? vậy  $x = \pm\sqrt{-m}$

Vậy giao điểm của (P) với đường thẳng  $y = m$  là :

$$A(-\sqrt{-m}; m) \text{ và } B(\sqrt{-m}; m)$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{-m} \text{ và } OA = OB = \sqrt{(\sqrt{-m})^2 + m^2} = \sqrt{m^2 - m}$$

$$\Delta OAB \text{ đều} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m} = 2\sqrt{-m} \Leftrightarrow m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{loại}) \\ m = -3 \end{cases}$$

Vậy với  $m = -3$  th? tam giác AOB là tam giác đều.

**Câu 6:** Biết  $(x + 2)(x - 3) = 0$  hay phương tr?nh  $x^2 - x - 6 = 0$  có hai nghiệm  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 3$ . Tương tự lập phương tr?nh bậc hai có hai nghiệm  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ;  $x_2 = 3$

Đáp án:  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 3$  là hai nghiệm của phương tr?nh  $(x + \frac{1}{2})(x - 3) = 0$   
Hay  $2x^2 - 5x - 3 = 0$ .

**Câu 7:** Cho các phương tr?nh :  $x^2 + mx - 1 = 0$  (1)

$$x^2 - x + m = 0 \quad (2)$$

T?m  $m$  để hai phương tr?nh trên có ít nhất một nghiệm chung. T?m nghiệm chung đó

Đáp án: Trừ từng vế của hai phương tr?nh (1) và (2) ta được:

$$(m + 1)x - (m + 1) = 0 \Leftrightarrow (m + 1)x = m + 1$$

+ Với  $m = -1$  hai phương tr?nh (1) và (2) đều là  $x^2 - x - 1 = 0$

Vậy nghiệm chung của hai phương tr?nh (1) và (2) là:  $(1 \pm \sqrt{5}) : 2$

+ Với  $m \neq -1$  ta có  $x = 1$  thay vào (1) ta được  $m = 0$  khi đó

$$(1) \text{ có dạng: } x^2 - 1 = 0 \text{ có nghiệm } x = \pm 1$$

$$(2) \text{ có dạng } x^2 - x = 0 \text{ có nghiệm là } 0 \text{ và } 1$$

Vậy với  $m = 0$  th? (1) và (2) có nghiệm chung là: 1.

Kết luận: - Với  $m = -1$  th? hai phương tr?nh (1) và (2) có hai nghiệm chung là:  $(1 \pm \sqrt{5}) : 2$

- Với  $m = 0$  th? (1) và (2) có một nghiệm chung là: 1.

**Câu 8:** Giải và biện luận phương tr?nh:  $x^2 - 2x + k = 0$  ( tham số  $k$ )

Đáp án

$$\text{Ta có: } \Delta = (-2)^2 - 4.1.k = 4(1 - k)$$

Nếu  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - k < 0 \Leftrightarrow k > 1 \Rightarrow$  phương tr?nh vô nghiệm.

Nếu  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow$  phương tr?nh có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = 1$

Nếu  $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - k > 0 \Leftrightarrow k < 1 \Rightarrow$  phương tr?nh có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 1 - \sqrt{1 - k}; \quad x_2 = 1 + \sqrt{1 - k}$$

Kết luận:

Nếu  $k > 1$  th? phương tr?nh vô nghiệm

Nếu  $k = 1$  th? phương tr?nh có nghiệm  $x = 1$

Nếu  $k < 1$  th? phương tr?nh có nghiệm  $x_1 = 1 - \sqrt{1 - k}; x_2 = 1 + \sqrt{1 - k}$

**Câu 9:** Cho phương trình  $(m - 1)x^2 + 2x - 3 = 0$  (1) (tham số m)

a) Tìm m để (1) có nghiệm

b) Tìm m để (1) có nghiệm duy nhất? tìm nghiệm duy nhất đó?

Đáp án

a) + Nếu  $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$  thì (1) có dạng  $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$  (là nghiệm)

+ Nếu  $m \neq 1$ . Khi đó (1) là phương trình bậc hai có:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3)(m - 1) = 12m - 8$ . Pt (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta = 12m - 8 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$

+ Kết hợp hai trường hợp trên ta có: Với  $m \geq \frac{2}{3}$  thì phương trình có nghiệm

b) + Nếu  $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$  thì (1) có dạng  $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$  (là nghiệm)

+ Nếu  $m \neq 1$ . Khi đó (1) là phương trình bậc hai có:

$\Delta = 2^2 - 4(-3)(m-1) = 12m - 8$ . Pt (1) có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \Delta = 12m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

(thỏa mãn  $m \neq 1$ )

Khi đó pt (1) có nghiệm  $x = -\frac{2}{2(m-1)} = -\frac{2}{2(\frac{2}{3}-1)} = 3$ .

+ Vậy với  $m = 1$  thì phương trình có nghiệm duy nhất là:  $x = \frac{3}{2}$

Với  $m = \frac{2}{3}$  thì phương trình có nghiệm duy nhất là:  $x = 3$ .

**Câu 9.** Giải phương trình  $3(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 1 = 0$  (2).

Đáp án

Đặt  $x^2 + x = t$ . Khi đó ta có: (2)  $\Rightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0$

Do  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16 > 0$ . Nên  $t_1 = 1$ ;  $t_2 = -\frac{1}{3}$

$t_1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 > 0$ . Nên  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ;  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$t_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 + x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 1 = 0$  (\*)

$\Delta_2 = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3 < 0$ . Nên (\*) vô nghiệm

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ;  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

**Câu 10:** Cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  (a, c khác không) có nghiệm  $x_1 > 0$ . Chứng minh rằng phương trình  $cx^2 + bx + a = 0$  có nghiệm  $x_2 > 0$  và  $x_1 + x_2 + x_1x_2 \geq 3$

Đáp án

Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm  $x_1 > 0$

thì phương trình  $cx^2 + bx + a = 0$  nghiệm đúng với  $x = \frac{1}{x_1}$  v?

$$c.\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + b.\frac{1}{x_1} + a = \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{x_1^2} = 0$$

Vậy  $x_2 = \frac{1}{x_1}$  là nghiệm của phương trình  $cx^2 + bx + a = 0$

Vì  $x_1 > 0$  nên  $x_2 > 0$

$$\text{Ta có: } x_1 + x_2 + x_1x_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + x_1 \cdot \frac{1}{x_1} \geq 2\sqrt{x_1 \cdot \frac{1}{x_1}} + 1 = 3$$

**Câu 11:** Cho phương trình  $x + 2\sqrt{x-1} - m^2 + 6m - 11 = 0$

- Giải phương trình khi  $m = 2$
- Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

Đáp án

a) Với  $m=2$  phương trình đã cho trở thành

$$x + 2\sqrt{x-1} - 3 = 0$$

Đặt  $\sqrt{x-1} = t \geq 0$  Ta có  $t^2 + 2t - 2 = 0$

$$t = -1 - \sqrt{3} \text{ (loại) hoặc } t = -1 + \sqrt{3}$$

Vậy với  $t = -1 + \sqrt{3}$  thì  $x = (-1 + \sqrt{3})^2 + 1 = 5 - 2\sqrt{3}$

b) Đặt  $\sqrt{x-1} = t \geq 0$  phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + 2t - m^2 + 6m - 10 = 0 (*)$$

Phương trình (\*) có  $a = 1 > 0$ ,  $c = -m^2 + 6m - 10 = -[(m-3)^2 + 1] < 0$

Nên phương trình có hai nghiệm trái dấu  $t_1$  và  $t_2$

Giả sử  $t_2 > 0$

Khi đó  $x = t_2^2 + 1$  Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

**Câu 12:** Cho phương trình  $x^2 + (4m + 1)x + 2(m-4) = 0$

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc  $m$ .

b) Tìm  $m$  để biểu thức  $A = (x_1 - x_2)^2$  có giá trị nhỏ nhất:

Đáp án:

- a) Ta có  $\Delta = 16m^2 + 33 > 0$ . Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

$$V? \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -(4m+1) (*) \\ P = x_1 \cdot x_2 = 2(m-4) (**) \end{cases}$$

Từ (\*) Suy ra  $m = \frac{-S-1}{4}$  Thay vào (\*\*) ta có

$$P = \frac{-S-17}{2}$$

Hay  $2P + S = -17$

Do đó  $2x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = -17$

Vậy biểu thức trên không phụ thuộc vào m.

- b) Ta có

$$A = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16m^2 + 33 \geq 33$$

Dấu "=" xảy ra khi m=0

Min A = 33 Khi m = 0.

**Câu 13:** Giải phương trình  $2(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$ . (2)

Đáp án: (2)  $\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 2)^2 + (x^2 - 4x + 2) - 6 = 0$  (3)

Đặt  $x^2 - 4x + 2 = t$  ( $t \geq -2$ )

(3)  $\Rightarrow 2t^2 + t - 6 = 0$ . Tính  $\Delta = b^2 - 4ac = 49 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = -2$

$$t_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$$

$$t_2 = -2 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình (2) có 3 nghiệm  $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}, x_3 = 0$

**Câu 14:** Một ca nô chạy từ bến A đến bến B dài 50km cả đi lẫn về mất 5 giờ 20 phút. Hỏi tỷ số vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô là bao nhiêu? Biết rằng khi nước đứng yên ca nô chạy với vận tốc đều và vận tốc của dòng nước là 5km/h

Đáp án: Gọi vận tốc đều của ca nô khi nước yên lặng là n

Ta có phương trình là:  $\frac{50}{n+5} + \frac{50}{n-5} = \frac{16}{3}$

Giải phương trình ta được n=20

Từ đó suy ra tỷ số là:  $\frac{20+5}{20-5} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

**Câu 15:** Một ô tô chuyển động đều với một vận tốc  $v$  định để đi hết quãng đường dài 120km. Đi được nửa đường xe nghỉ 3 phút, nếu để đến nơi đúng giờ xe phải tăng tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính thời gian xe chạy.

Đáp án: Gọi vận tốc ô tô dự định đi là  $n$ (km/h)

$$\text{Ta có phương trình: } \frac{60}{n} + \frac{60}{n+2} + \frac{1}{20} = \frac{120}{n}$$

Giải phương trình ta được  $n=48$

$$\text{Vậy thời gian xe chạy là: } \frac{120}{48} - \frac{1}{20} = 2 \text{ giờ } 17 \text{ phút}$$

**Câu 16:** Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24km; cùng lúc đó cũng từ A về B một bè nửa trôi với vận tốc dòng nước là 4km/h. Khi đến B ca nô quay lại gặp bè nửa tại địa điểm C cách A 8km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Đáp án: Gọi vận tốc thực của ca nô là  $x$ (km/h)

Thời gian bè nửa trôi từ A đến C là  $8:4=2$ h

Đó chính là thời gian ca nô chạy từ A đến B rồi từ B về C

$$\text{Ta có phương trình } \frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = 2 \text{ giải phương trình ta được } x=20$$

Vậy vận tốc thực của ca nô là 20(km/h).