Tìm m để phương trình $x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m=0$ (i) có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân ?

LỜI GIẢI

$(i)\Leftrightarrow(x+2)\left[x^2+(3-m)x-3m\right]=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=-3\vee x=m$.

(i) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-2\\m\neq-3\end{cases}$ (ii). Do các nghiệm này lập thành cấp số nhân và ta sắp xếp các nghiệm này theo thứ tự tăng dần được các dãy số sau:

- $-3;\ -2;\ m$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow\ -3.m=(-2)^2\Leftrightarrow\ m=-\frac{4}{3}$.
- $-3;\ m;\ -2$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow\ -3.(-2)=m^2\Leftrightarrow\ m=\pm\sqrt{6}$.
- $m;\ -3;\ -2$ lập thành cấp số nhân $m.(-2)=(-3)^2\Leftrightarrow\ m=-\frac{9}{2}$.

- So với (ii), các giá trị m cần tìm là: $m=-\frac{9}{2}\vee m=-\frac{4}{3}\vee m=\pm\sqrt{6}$.

Tìm tham số m để phương trình $x^3-(3m+1)x^2+2mx=0$ (i) có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

LỜI GIẢI

$(i)\Leftrightarrow x\left[x^2-(2m+1)x+2m\right]=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1\vee x=2m$

- (i) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}2m\neq0\\2m\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\m\neq\frac{1}{2}\end{cases}$ (ii)

- Để các nghiệm này lập thành cấp số cộng nên ta sắp xếp các nghiệm này theo thứ tự tăng dần được các dãy số sau:

+ $2m;\ 0;\ 1$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow\ 2m+1=2.0\Leftrightarrow\ m=-\frac{1}{2}$ (thỏa (ii)).

+ $0;\ 2m;\ 1$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow\ 0+1=2.2m\Leftrightarrow\ m=\frac{1}{4}$ (thỏa (ii)).

+ $0;\ 1;\ 2m$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow\ 0+2m=2.1\Leftrightarrow\ m=1$ (thỏa (ii)).

- Vậy $m=-\frac{1}{2}\vee m=\frac{1}{4}\vee m=1$ là các giá trị cần tìm.

Lưu ý

Trong bài giải trên, ta đã tìm ra được cả ba nghiệm của phương trình bằng nguyên tắc nhẩm nghiệm. Còn nếu không tìm ra được nghiệm hoặc không đủ ba nghiệm, sẽ làm như thế nào ? Ta cùng xét hai bài tập nhỏ sau:

— ***Bài toán không tìm được nghiệm nào của phương trình:***

Tìm m để phương trình $x^3-3x^2-9x+m=0$ có ba nghiệm phân biệt và các nghiệm đó thành lập cấp số cộng.

Bài giải

$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \qquad (*)$

Gọi $x_1, x_2, x_3; (x_1 < x_2 < x_3)$ là ba nghiệm của phương trình $(*)$. Khi đó, ta sẽ phân tích được:

$x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$ và đồng nhất hệ số của x^2, ta được:

$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \ (i)$. Do x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng theo thứ tự đó nên $x_1 + x_3 = 2x_2 \ (ii)$.

Thế (ii) vào (i), ta được: $x_2 = 1$.

Thế $x_2 = 1$ vào $(*)$ được $m = 11$. Do đây chỉ là điều kiện cần, ta xét thêm điều kiện đủ, nghĩa là khi $m = 11$ thì $(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2\sqrt{3} \vee x_2 = 1 \vee x_3 = 1 + 2\sqrt{3}$ luôn có $x_1 + x_3 = 2x_2$ nên $m = 11$ là giá trị cần tìm của bài toán.

Cần nhớ: nếu đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ (a \neq 0)$ có các nghiệm x_1, x_2, x_3 khi $f(x) = 0$ thì ta luôn phân tích được thành tích số dạng:

$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$.

Chứng minh rằng, với mọi m phương trình $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0$ luôn có 3 nghiệm và ba nghiệm này lập thành cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Ta có $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left[x^2 - (m^2 + 2)x + 1\right] = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x = 1 = x_3$ hoặc $x^2 - (m^2 + 2)x + 1 = 0$ (2).

Có $\Delta_{(2)} = (m^2 + 2)^2 - 4 = m^4 + 4m^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow$ phương trình (2) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2. Ngoài ra có $x_1.x_2 = 1 = x_3^2$ (đpcm).