

$$\text{Mà } (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + 2 \geq 2 \text{ với mọi } x \geq 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{(\sqrt{x} - 1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Thỏa mãn điều kiện } x \geq 0 \text{)}$$

$$\text{Vậy GTLN của } A = \frac{1}{2} \text{ khi } x = 1$$

Câu 19: Tìm GTLN của $A = \frac{1}{5x - 3\sqrt{x} + 8}$ với mọi $x \geq 0$

Đáp án

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{5x - 3\sqrt{x} + 8}$$

$$= \frac{1}{5\left(x - \frac{3}{5}\sqrt{x} + \frac{8}{5}\right)} = \frac{1}{5\left[\left(\sqrt{x} - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{151}{100}\right]} \leq \frac{20}{151}$$

$$A = \frac{20}{151} \text{ khi } x = \frac{9}{100} \text{ (Thỏa mãn điều kiện } x \geq 0 \text{)}$$

$$\text{GTLN của } A = \frac{20}{151} \text{ khi } x = \frac{9}{100}$$

Câu 20: Cho $B = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$ trong đó x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện

$$xy = 1. \text{ Chứng minh rằng } B \geq 1$$

Đáp án

$$\begin{aligned} B &= \frac{(x^4 + y^4) + (x^3 + y^3)}{xy + x + y + 1} \\ &= \frac{(x^4 + y^4) + (x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{x + y + 2} \\ &= \frac{(x^4 + y^4) + (x+y)(x^2 + y^2 - 1)}{x + y + 2} \quad (\text{Với } xy = 1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với hai số dương x^2, y^2, x^4, y^4 ta có

$$B \geq \frac{2x^2y^2 + (x+y)(2xy-1)}{x+y+2} = \frac{2+x+y}{x+y+2} = 1$$

Dấu « = » xảy ra khi $x = y = 1$

Câu 21: Chứng minh rằng: $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2015\sqrt{2014\sqrt{2013\sqrt{2012}}}}}} < 2015$

Đáp án:

Ta có:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2015\sqrt{2014\sqrt{2013\sqrt{2012}}}}}} < \sqrt{\sqrt{\sqrt{2015\sqrt{2015\sqrt{2015\sqrt{2015}}}}}} < \sqrt[16]{2015^{15}} < 2015$$

$$\text{Vậy } \sqrt{\sqrt{\sqrt{2015\sqrt{2014\sqrt{2013\sqrt{2012}}}}}} < 2015$$

Câu 22: Cho $A = \sqrt{2016-x} + \sqrt{x-2010}$ với $2010 \leq x \leq 2016$

Chứng minh rằng: $\sqrt{6} \leq A \leq 2\sqrt{3}$

Đáp án:

Ta có $A^2 = 6 + 2\sqrt{(2016-x)(x-2010)} \geq 6 \Rightarrow A \geq \sqrt{6}$

“=” xảy ra khi $x = 2016$ hoặc $x = 2010$

Mặt khác

$$A^2 = 6 + 2\sqrt{(2016-x)(x-2010)} \leq 6 + 2016 - x + 2010 + x \leq 12$$

$$\Rightarrow A \leq 2\sqrt{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2013$

$$\text{Vậy } \sqrt{6} \leq A \leq 2\sqrt{3}$$

Câu 23: Cho $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$

Tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x + 3}$$

Đáp án:

Ta có:

$$x^2 = 3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9 - 5 - 2\sqrt{3}} = 6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$$

Do $x > 0$ nên $x = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2$

$$A = \frac{(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) + 7}{(x^2 - 2x) + 3}$$

Mà

$$A = \frac{4 + 4 + 7}{2 + 3} = 3$$

Do đó

Vậy giá trị của biểu thức $A = 3$ tại

$$x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$$

Câu 24: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}} : \frac{1}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}} = a-b \quad (a \geq 0; b \geq 0; a \neq b)$$

Đáp án: Với $a \geq 0$; $b \geq 0$; $a \neq b$ ta có:

$$VT = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})} : \frac{1}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2} \cdot \frac{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{1} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b = VP$$

Câu 25: Rút gọn biểu thức:

$$A = (\sqrt{8x^2y} - 2y\sqrt{x} - x\sqrt{x}) : (\sqrt{2y} - \sqrt{x}) \text{ với } x \geq 0; y \geq 0; x \neq 2y$$

$$\text{Đáp án: } A = x - \sqrt{2xy}$$

Câu 26: Tìm x biết: $\frac{\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{4-x}} = 3\sqrt{x}$.

Đáp án: $x=0$

Câu 27: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = x - 8\sqrt{x} + 9$$

Đáp án: GTNN của A là -7 khi $x=16$

Câu 28: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = -x + 10\sqrt{x} + 1$$

Đáp án: GTLN của B là 26 khi $x=25$

Câu 29: Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết :

$$\sqrt{x-1} + 5\sqrt{4x-4} - \sqrt{9x-9} < 4$$

Đáp án điều kiện $x \geq 1$

$$\sqrt{x-1} + 5\sqrt{4(x-1)} - \sqrt{9(x-1)} < 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 5 \cdot 2\sqrt{x(x-1)} - 3\sqrt{x-1} < 4$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{x-1} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < \frac{5}{4} \text{ kết hợp điều kiện } 1 \leq x < \frac{5}{4} \text{ mà } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 1$$

Câu 30: Chứng minh rằng: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$

Đáp án

Ta có:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2\sqrt{(\sqrt{a^2+1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = 2 \text{ Theo bất đẳng thức cô si}$$

Câu 31: Cho $a, b = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{a-b} = 2\sqrt{2}$

Đáp án: $\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2ab}{a-b} = (a-b) + \frac{2}{a-b} \geq \dots = 2\sqrt{2}$ (vì $a \cdot b = 1$)

Câu 32: Cho biểu thức $A = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$

a. Tìm điều kiện của x để A xác định.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Đáp án: A xác định khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \\ x+8-6\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1-2\sqrt{x-1}+1 \geq 0 \\ x+1-6\sqrt{x-1}+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{x-1}-3)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Vậy A xác định $\Leftrightarrow x \geq 1$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = |\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}-3| \\ &= |\sqrt{x-1}-1| + |3-\sqrt{x-1}| \geq \sqrt{x-1}-1+3-\sqrt{x-1} = 2 \\ &\text{(àp dụng } |A| \geq A \text{ đả"} = " \text{ xảy ra } \Leftrightarrow A \geq 0) \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2 khi $2 \leq x \leq 10$

Câu 33: Giải phương trình sau: $\frac{\sqrt{x-2010}-1}{x-2010} + \frac{\sqrt{y-2011}-1}{y-2011} + \frac{\sqrt{z-2012}-1}{z-2012} = \frac{3}{4}$

Đáp án.

$$\frac{\sqrt{x-2010}-1}{x-2010} + \frac{\sqrt{y-2011}-1}{y-2011} + \frac{\sqrt{z-2012}-1}{z-2012} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 2010 \\ y > 2011 \\ z > 2012 \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{x-2010} \\ b = \sqrt{y-2011} \\ c = \sqrt{z-2012} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Ta có phương trình

$$\frac{a-1}{a^2} + \frac{b-1}{b^2} + \frac{c-1}{c^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{a} = 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{b} = 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{c} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 2 \text{ Thỏa mãn điều kiện } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = 2014 \\ y = 2015 \\ z = 2016 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm
(x; y; z) = (2014; 2015; 2016)

Câu 34: Rút gọn

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Đáp án:

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\dots+\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1} = \frac{1-\sqrt{100}}{-1} = 9 \end{aligned}$$

Vậy A = 9

Câu 35: Cho $a = \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$; $b = \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$

So sánh a với b ?

$$a = \sqrt{1997} - \sqrt{1996}; \quad b = \sqrt{1998} - \sqrt{1997}$$

Đáp án :

Ta có

$$a = \frac{2016 - 2015}{\sqrt{2016} + \sqrt{2015}} = \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2015}}$$

$$b = \frac{2017 - 2016}{\sqrt{2017} + \sqrt{2016}} = \frac{1}{\sqrt{2017} + \sqrt{2016}}$$

Ta thấy $\sqrt{2016} + \sqrt{2015} < \sqrt{2017} + \sqrt{2016}$

Nên $a > b$.

Câu 36: Tính $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

Đáp án :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6} - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1} = 1 \end{aligned}$$

Câu 37: Cho biểu thức $M = \frac{2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2(\sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x - 10\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x^3} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn M

b) Tìm x để biểu thức M có giá trị lớn nhất.

Đáp án:

a)

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2(\sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x - 10\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{2(x + \sqrt{x} + 1) + 2(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + x - 10\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{2x + 2\sqrt{x} + 2 + 2x - 2 + x - 10\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{5x - 8\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{5x - 5\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(5\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{5\sqrt{x} - 3}{x + \sqrt{x} + 1}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $M = \frac{5\sqrt{x} - 3}{x + \sqrt{x} + 1}$

$$b) M = \frac{5\sqrt{x} - 3}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{(x + \sqrt{x} + 1) - (x - 4\sqrt{x} + 4)}{x + \sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{x + \sqrt{x} + 1}$$

Với $x \geq 0, x \neq 1$ thì $x + \sqrt{x} + 1 > 0$ và $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 0$

$$\Rightarrow M \leq 1 \Rightarrow \max M = 1$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn ĐKXD).

Vậy giá trị lớn nhất của $M = 1 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 38: Rút gọn

$$a) \sqrt[3]{(a+1)^3} + \sqrt[3]{(a-1)^3}$$

$$b) \frac{a+1}{\sqrt[3]{a^2 - \sqrt{a} + 1}}$$

Đáp án:

$$a) \sqrt[3]{(a+1)^3} + \sqrt[3]{(a-1)^3} = a+1 + a-1 = 2a$$

$$b) \frac{a+1}{\sqrt[3]{a^2 - \sqrt{a} + 1}} = \frac{\sqrt[3]{a^3 + 1^3}}{\sqrt[3]{a^2 - \sqrt{a} + 1}} = \frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt[3]{a^2 - \sqrt{a} + 1})}{\sqrt[3]{a^2 - \sqrt{a} + 1}} = \sqrt{a} + 1$$

Câu 39: Giải phương trình

$$a) 3 - \sqrt[3]{(2x+1)} = 0 ;$$

$$b) \sqrt[3]{4-2x} + 5 = 3$$

Đáp án:

$$a) 3 - \sqrt[3]{(2x+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x+1)} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 27$$

$$\Leftrightarrow x = 13$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{4-2x} + 5 = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4-2x} = -2$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Câu 40: Rút gọn

$$\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)} - \sqrt[3]{(x-1)^3}$$

Đáp án:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x+1)} - \sqrt[3]{(x-1)^3} &= \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} - \sqrt[3]{(x-1)^3} \\ &= \sqrt[3]{(x+1)^3} - \sqrt[3]{(x-1)^3} \\ &= x+1 - (x-1) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Câu 41. Cho $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \dots + \sqrt[3]{60}}}}$ Chứng minh $3 < A < 4$

$$\text{Đáp án : } \sqrt[3]{60} > \sqrt[3]{27} = 3.$$

$$\sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \dots + \sqrt[3]{60}}} < \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \dots + \sqrt[3]{64}}} = 4$$

Câu 42. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$

Đáp án lập phương hai vế biến đổi ta được $4x(x^2-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ và $x=\pm\sqrt{5}$.

Câu 43. Giải phương trình $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2-4}$

Đáp án

Đặt $\sqrt[3]{x+2} = a$; $\sqrt[3]{x-2} = b$. phương trình mới $2a^2 - b^2 - ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)(2a+b) = 0 \Leftrightarrow$
hoặc $a=b$ hoặc $2a=-b$

\Rightarrow pt có nghiệm $x = -\frac{14}{9}$

Câu 44 Tính $B = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$

Ta có $B^3 = (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}})^3$

$$= 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}})$$
$$= 4 - 3B$$

$$\Leftrightarrow B^3 + 3B - 4 = 0 \Leftrightarrow (B - 1)(B^2 + B + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow B = 1 \text{ vì } B^2 + B + 4 > 0$$

Vậy $B = 1$