Ví dụ : Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a). $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$ b). $y = x^3 + x - 2$ tại $x_0 = -2$

c). $y = \sqrt{2x+1}$ tại $x_0 = 1$ d). $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0 = 3$

LỜI GIẢI

a). Cách 1: Cho $x_0 = 2$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(2+\Delta x)^2 + (2+\Delta x) + 1 - (2.2^2 + 2 + 1) = \Delta x(9 + 2\Delta x)$$

Ta có $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(9+2\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(9 + 2\Delta x) = 9$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + x + 1 - 11}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2 + x - 10}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x+5)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(2x+5) = 9$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 2$ và $f'(2) = 9$.

b). $y = x^3 + x - 2$ tại $x_0 = -2$

Cách 1: Cho $x_0 = -2$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y = f(-2+\Delta x) - f(-2) = (-2+\Delta x)^3 + (-2+\Delta x) - 1 + 12 = 13\Delta x - 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$= \Delta x\left(13 - 6\Delta x + (\Delta x)^2\right)$$

Ta có $f'(-2) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta x\left(13 - 6\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(13 - 6\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 13$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3 + x - 2 + 12}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2}\dfrac{x^3 + x + 10}{x+2}$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2 - 2x + 5)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x^2 - 2x + 5) = 13$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0 = -2$ và $f'(-2) = 13$.

c). $y = \sqrt{2x+1}$ tại $x_0 = 1$

Cách 1: Cho $x_0 = 1$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1+\Delta x) - f(1) = \sqrt{2(1+\Delta x) + 1} - \sqrt{3} = \frac{2\Delta x}{\sqrt{3 + 2\Delta x} + \sqrt{3}}$$

Ta có $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3+2\Delta x} + \sqrt{3}\right)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{2}{\sqrt{3 + 2\Delta x} + \sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}\right)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$ và $f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

d). $y=\frac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0=3$

Cách 1: Cho $x_0=3$ một số gia Δx. Khi đó hàm số nhận một số gia tương ứng:

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=f\left(3+\Delta x\right)-f\left(3\right)=\frac{2(3+\Delta x)-1}{3+\Delta x+1}-\frac{5}{4}=\frac{5+2\Delta x}{4+\Delta x}-\frac{5}{4}=\frac{3\Delta x}{4(4+\Delta x)}$$

Ta có $f'\left(3\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x.4(4+\Delta x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3}{4(4+\Delta x)}=\frac{3}{16}$.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f\left(x\right)-f\left(3\right)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\frac{2x-1}{x+1}-\frac{5}{4}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{3(x-3)}{(x-3)(x+1)4}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{(x+1)4}=\frac{3}{16}$

Kết luận theo định nghĩa, hàm số có đạo hàm tại $x_0=3$ và $f'\left(3\right)=\frac{3}{16}$.