C. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	B	A	A	A	C	D	C	D	B	A	D	B	B	C	C	D	B	C

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	B	B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	D	B	A	A	C	A

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	D	A	B	A	D	B	C	B	D	C	D	C	A	D	B	D	A	C	B

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	D	A	B	A	D	B	C	B	D	C	D	C	A	D	B	D	D	C	A

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	D	A	B	A	D	B	C	B	D	C	D	C	A	D	B	A	C	B	B

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
D	A	B	A	A	A	C	D	C	D	B	A	D	B	B	C	C	D	B	C

121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
C	A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A

141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
C	B	B	C	B	C	D	D	C	D	B	A	A	C	D	B	A	A	C	A

161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174						
A	D	A	B	A	D	B	C	B	D	C	D	C	A						

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hai hàm số f, g liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

C. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$. **D.** $\int\limits_a^b xf(x)dx = x\int\limits_a^b f(x)dx$.

Câu 2. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng?

A. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$. **B.** $\int\limits_a^a f(x)dx = 1$. **C.** $\int\limits_a^a f(x)dx = -1$. **D.** $\int\limits_a^a f(x)dx = f(a)$.

Câu 3. Tích phân $\int\limits_0^1 dx$ có giá trị bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 4. Cho số thực a thỏa mãn $\int\limits_{-1}^a e^{x+1}dx = e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int\limits_{-1}^{a} e^{x+1}dx = e^{x+1}\Big|_{-1}^{a} = e^{a+1} - e$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương

$$e^{a+1} - 1 = e^2 - 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0;\pi]$ đạt giá trị bằng 0?

A. $f(x) = \cos 3x$. **B.** $f(x) = \sin 3x$.

C. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tính tích phân cho từng hàm số trong các đáp án:

- $\int\limits_{0}^{\pi} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{0}^{\pi} = 0$,
- $\int\limits_{0}^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{0}^{\pi} = 2$,
- $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)dx = 4\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = 2\left(\sqrt{2} - 2\right)$,
- $\int\limits_{0}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)dx = -4\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = 2\sqrt{2}$.

Vậy chọn $f(x) = \cos 3x$.

Câu 6. Trong các tích phân sau, tích phân nào có giá trị **khác** 2?

A. $\int\limits_{1}^{e^2} \ln x dx$. **B.** $\int\limits_{0}^{1} 2dx$. **C.** $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx$. **D.** $\int\limits_{0}^{2} x dx$.

Hướng dẫn giải

Dù giải bằng máy tính hay làm tay, ta không nên thử tính lần lượt từng đáp án từ A đến D, mà nên chọn các tích phân đơn giản để thử trước**C.** Ví dụ

- $\int\limits_{0}^{1} 2dx = 2x\Big|_{0}^{1} = 2$,
- $\int\limits_{0}^{2} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 2$
- $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_{0}^{\pi} = 2$,

nên nhận $\int\limits_{1}^{e^2} \ln x dx$.

Câu 7. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$?

A. $f(x) = e^x$. **B.** $f(x) = \cos x$. **C.** $f(x) = \sin x$. **D.** $f(x) = x + 1$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

Tính lần lượt từng tích phân (cho đến khi nhận được kết quả đúng), ta được:

- $\int\limits_{-1}^{1} \sin x dx = -\cos x\Big|_{-1}^{1} = 0 = \int\limits_{-2}^{2} \sin x dx \rightarrow$ nhận,

- $\int_{-1}^{1}\cos xdx = \sin x\Big|_{-1}^{1} = 2\sin 1$, và $\int_{-2}^{2}\cos xdx = \sin x\Big|_{-2}^{2} = 2\sin 2$ → loại,
- $\int_{-1}^{1} e^x dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$, và $\int_{-2}^{2} e^x dx = e^x\Big|_{-2}^{2} = e^2 - e^{-2}$ → loại,
- $\int_{-1}^{1}(x+1)dx = \left.\dfrac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 2$, và $\int_{-2}^{2}(x+1)dx = \left.\dfrac{(x+1)^2}{2}\right|_{-2}^{2} = 4$ → loại.

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Cách 2: Phương pháp tự luận

Ta đã biết nếu f là hàm số lẻ và liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ với mọi số thực a. Trong các lựa chọn ở đây, chỉ có hàm số $y = f(x) = \sin x$ là lẻ, nên đó là đáp án của bài toán.

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{-1}^{1}\sin xdx - \int_{-2}^{2}\sin xdx$	0
$\int_{-1}^{1}\cos xdx - \int_{-2}^{2}\cos xdx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1}e^x dx - \int_{-2}^{2}e^x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1}(x+1)dx - \int_{-2}^{2}(x+1)dx$	$\neq 0$

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Câu 8. Tích phân $I = \int_{2}^{5}\dfrac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $3\ln 3$. **B.** $\dfrac{1}{3}\ln 3$. **C.** $\ln\dfrac{5}{2}$. **D.** $\ln\dfrac{2}{5}$.

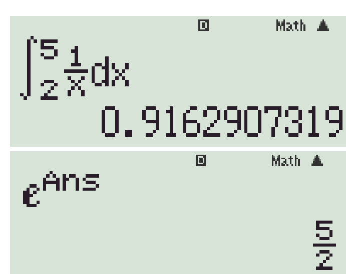
Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

$$I = \int_{2}^{5}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{2}^{5} = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,91629...$



Bước 2: Lấy $e^{0,91629...}$ cho kết quả $\dfrac{5}{2}$ → chọn $\ln\dfrac{5}{2}$.

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả

Phép tính	Kết quả

$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \ln\frac{5}{2}$	0
$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\ln 3$	$\neq 0$

$\int_2^5 \frac{dx}{x} - 3\ln 3$	$\neq 0$
$\int_2^5 \frac{dx}{x} - \ln\frac{2}{5}$	$\neq 0$

→ chọn $\ln\frac{5}{2}$.

Câu 9. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$. **B.** $2\ln 3$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **D.** $2\ln\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tự luận

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cot\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \left[\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

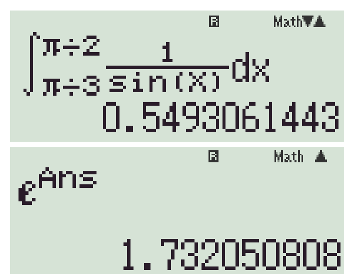
$$= \left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left[\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \ln\sqrt{3}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,549306...$

Bước 2: Lấy $e^{0,549306...}$ cho kết quả $1,732050808... \approx \sqrt{3}$ → chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.



Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln 3$	0
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$	$\neq 0$

→ chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.

Nhận xét: Ở bài này cách làm bằng máy tính có vẻ nhanh hơn.

Câu 10. Nếu $\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx = K-2e$ thì giá trị của K là

A. $12,5$. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

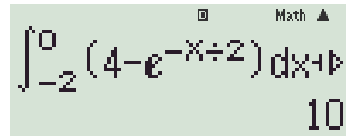
Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

$$K=\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e=\left(4x+2e^{-x/2}\right)\Big|_{-2}^{0}+2e=2-\left(-8+2e\right)+2e=10.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Dùng máy tính tính $\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx+2e$ như hình bên, thu được giá trị $K=10$.



Câu 11. Tích phân $I=\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{2\ln 2}{3}$. **B.** $-\frac{2\ln 2}{3}$. **C.** $-2\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

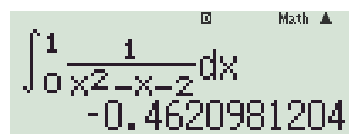
$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right]dx=\frac{1}{3}\left[\ln|x-2|-\ln|x+1|\right]\Big|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

Học sinh có thể áp dụng công thức $\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}dx=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$ để giảm **một** bước tính:

$$I=\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{2\ln 2}{3}.$$

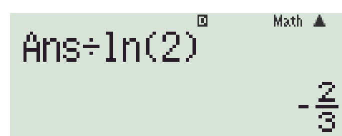
Phương pháp trắc nghiệm

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $-0.4620981...$



Bước 2: Loại đáp án dương $\frac{2\ln 2}{3}$ và loại đáp án nhiễu "Không xác định".

Bước 3: Chia giá trị $-0.4620981...$ cho $\ln 2$, nhận được $-\frac{2}{3}$



→ chọn $-\frac{2\ln 2}{3}$.

Câu 12. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_{1}^{5}f(x)dx=2$ và $\int_{1}^{5}g(x)dx=-4$. Giá trị của $\int_{1}^{5}\left[g(x)-f(x)\right]dx$ là

A. -6. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

$$\int_{1}^{5}\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_{1}^{5}g(x)dx-\int_{1}^{5}f(x)dx=-4-2=-6.$$

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x - 2f(x)]dx$ có giá trị bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^3 [x-2f(x)]dx = \int_0^3 xdx - 2\int_0^3 f(x)dx = \frac{9}{2} - 2\times 2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 14. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. 5. **B.** -5. **C.** 9. **D.** -9.

Hướng dẫn giải

$$\int_3^5 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -7+2 = -5.$$

Câu 15. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_1^3 e^x dx = \left(e^x\right)\Big|_1^3$. **B.** $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$.

C. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx = (\sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$. **D.** $\int_1^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^2$.

Hướng dẫn giải

Phép tính $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$ là sai. Phép tính đúng là $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln|x|)\Big|_{-3}^{-2}$.

Câu 16. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

B. $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a;b)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x) = F(x) + 5$ cũng thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Câu 17. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$. **B.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$. **D.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

Câu 18. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $m \le f(x) \le M \ \forall x \in [a;b]$ thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(a-b)$.

B. Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(b-a)$.

C. Nếu $f(x) \le M \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

D. Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(a-b)$.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề "Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(a-b)$" sai, mệnh đề đúng phải là

"Nếu $f(x) \ge m \ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge m(b-a)$".

Câu 19. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $g(x) \ne 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Xét các khẳng định sau:

I. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

II. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

III. $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$.

IV. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Trong các khẳng định trên, có bao nhiêu khẳng định **sai**?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Các công thức $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ và $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$ là sai.

Câu 20. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với giá trị của tích phân nào trong các tích phân dưới đây?

A. $\int_0^2 (x^2+x-3)dx$. **B.** $3\int_0^{3\pi} \sin x dx$. **C.** $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$. **D.** $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Tính rõ từng phép tính tích phân để tìm ra kết quả đúng (chỉ tính đến khi nhận được kết quả đúng thì dừng lại):

- $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^{\ln\sqrt{10}} = \frac{e^{2\ln\sqrt{10}}-1}{2} = \frac{9}{2}$,
- $3\int_0^{3\pi} \sin x dx = -3\cos x|_0^{3\pi} = 6$,
- $\int_0^2 \left(x^2+x-3\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x\right)\right|_0^2 = \frac{8}{3}+2-6 = -\frac{4}{3}$,
- $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+\pi)|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(\sin 4\pi - \sin\pi) = 0$.

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$	0
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{3\pi} \sin x dx$	$-\frac{3}{2}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^2 \left(x^2+x-3\right)dx$	$\frac{35}{6}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$	$\frac{9}{2}$

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, sao cho $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ thì $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[a;b]$.

B. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[-3;3]$, luôn có $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$.

C. Với mọi hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

D. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[1;5]$ thì $\int_1^5 [f(x)]^2 dx = \left.\frac{[f(x)]^3}{3}\right|_1^5$.

Hướng dẫn giải

Vì $d(-x) = (-1)dx$ nên $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(x)(-1)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

B. Nếu $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

C. Nếu $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.

D. Nếu $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

- Hàm số $y = x^3 - \frac{x}{2}$ thỏa $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx$ và $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$, nhưng nó là hàm lẻ trên $[-1;1]$.
- Hàm số $y = x^2 - \frac{1}{3}$ thỏa $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$, nhưng nó làm hàm chẵn trên $[-1;1]$.
- Còn khi f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ và suy ra
$$\int_{0}^{1} f(x)dx = -\int_{0}^{1} f(x)(-1)dx = -\int_{0}^{1} f(x)d(-x) = -\int_{0}^{1} f(-x)d(-x) = -\int_{0}^{-1} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt.$$

Câu 23. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = x^6 \sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_{1}^{2} x^6 \sin^5 xdx$ có giá trị bằng

A. $F(2) - F(1)$. **B.** $-F(1)$. **C.** $F(2)$. **D.** $F(1) - F(2)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a;b]$, ta có $\int_{1}^{2} x^6 \sin^5 xdx = F(2) - F(1)$.

Câu 24. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai số thực $a < b$. Nếu $\int_{a}^{b} f(x)dx = \alpha$ thì tích phân $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{\alpha}{2}$. **B.** 2α. **C.** α. **D.** 4α.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$ và

x	$a/2$	$b/2$
t	a	b

Vậy $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{a/2}^{b/2} f(2x)2dx = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{\alpha}{2}$.

Phương pháp trắc nghiệm

Phương pháp tự luận tốt hơn cả, nhưng nếu học sinh không nắm rõ, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[0;1]$ và tính toán.

Ví dụ $f(x)=x$ với $x\in[0;1]$. Khi đó

$$\alpha=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$

suy ra

$$\int_0^{1/2} f(2x)dx=\int_0^{1/2} 2xdx=\frac{1}{4}=\frac{\alpha}{2}.$$

Câu 25. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y=x^3\sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó tích phân $\int_1^2 81x^3\sin^5 3xdx$ có giá trị bằng

A. $3\left[F(6)-F(3)\right]$. **B.** $F(6)-F(3)$. **C.** $3\left[F(2)-F(1)\right]$. **D.** $F(2)-F(1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx$ và đổi cận

x	1	2
t	3	6

Vậy $\int_1^2 81x^3\sin^5 3xdx=\int_1^2 (3x)^3(\sin^5 3x)3dx=\int_3^6 t^3\sin^5 tdt=F(6)-F(3)$.

Câu 26. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx=6$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx$ là

A. -6. **B.** 6. **C.** -3. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=2\sin x\Rightarrow dt=2\cos xdx$ và

x	0	$\pi/2$
t	0	2

Vậy $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx=\int_0^2 \frac{f(t)}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=3$.

Câu 27. Bài toán tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t=\ln x+1$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$ và

x	1	e
t	1	2

II. $I=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx=\int_1^2 \sqrt{t}\,(t-1)\,dt$

III. $I=\int_1^2 \sqrt{t}\,(t-1)\,dt=\left(\sqrt{t^5}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)\Big|_1^2=1+3\sqrt{2}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bài giải đúng. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Sai ở Bước III.

Hướng dẫn giải

Bước III sai. Phép tính đúng là $I=\int_1^2 \sqrt{t}\,(t-1)\,dt=\left(\frac{2}{5}\sqrt{t^5}-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^2=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

Câu 28. Xét tích phân $I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t=\cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây

A. $I=-\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$. **B.** $I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$. **C.** $I=-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$. **D.** $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $t=\frac{1}{2}$. Vậy

$$I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}dx=-\int\limits_1^{1/2}\frac{2t}{1+t}dt=\int\limits_{1/2}^{1}\frac{2t}{1+t}dt.$$

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào luôn đúng?

A. $\int\limits_a^b|f(x)|dx>\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b|f(x)|dx$.

C. $\int\limits_a^b|f(x)|dx\ge\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)dx>\int\limits_a^b|f(x)|dx$.

Câu 30. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_0^1\sin(1-x)dx=\int\limits_0^1\sin xdx$. **B.** $\int\limits_0^1(1+x)^x dx=0$.

C. $\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin xdx$. **D.** $\int\limits_{-1}^1 x^{2017}(1+x)dx=\frac{2}{2019}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Tính trực tiếp các tích phân

- Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow\int\limits_0^1\sin(1-x)dx=-\int\limits_1^0\sin tdt=\int\limits_0^1\sin tdt$
- Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{1}{2}dx\Rightarrow\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\int\limits_0^{\pi/2}2\sin tdt$
- $\int\limits_{-1}^1 x^{2017}(1+x)dx=\left.\left(\frac{x^{2018}}{2018}+\frac{x^{2019}}{2019}\right)\right|_{-1}^1=\left(\frac{1^{2018}}{2018}+\frac{1^{2019}}{2019}\right)-\left(\frac{(-1)^{2018}}{2018}+\frac{(-1)^{2019}}{2019}\right)=\frac{2}{2019}$

Vậy $\int\limits_0^1(1+x)^x dx=0$ sai.

Cách 2: Nhận xét tích phân

Ta thấy $(1+x)^x\ge 1$ với mọi $x\in[0;1]$ nên $\int\limits_0^1(1+x)^x dx\ge\int\limits_0^1 1dx=1$, vậy "$\int\limits_0^1(1+x)^x dx=0$" là khẳng định sai.

Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int\limits_0^1(1+x)^x dx$	>0

$\int_0^1 \sin(1-x)dx - \int_0^1 \sin x dx$	0
$\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx - 2\int_0^{\pi/2} \sin x dx$	0
$\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx - \frac{2}{2019}$	0

suy ra $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$ là khẳng định sai.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx$.

B. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

C. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

D. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2\int_0^2 f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Với hàm số f bất kỳ và số thực dương a, ta luôn nằm lòng 2 tính chất sau đây:

- Nếu f là hàm số lẻ trên đoạn [-a;a] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,
- Nếu f là hàm số chẵn trên đoạn [-a;a] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Vậy trong bài này ta chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Nếu học sinh không nắm rõ hai tính chất kể trên, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[-2;2]$ và tính toán. Ví dụ $f(x) = x$ với $x \in [-2;2]$. Khi đó

- $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_0^2 f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$,
- $\int_{-2}^{2} f(x)dx \neq -2\int_0^2 f(x)dx$.

Vậy chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

Câu 32. Bài toán tính tích phân $I = \int_{-2}^{1} (x+1)^2 dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t = (x+1)^2$, suy ra $dt = 2(x+1)dx$,

II. Từ đây suy ra $\frac{dt}{2(x+1)} = dx \Rightarrow \frac{dt}{2\sqrt{t}} = dx$. Đổi cận

x	-2	1
t	1	4

III. Vậy $I = \int_{-2}^{1} (x+1)^2 dx = \int_1^4 \frac{t}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4 = \frac{7}{3}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ Bước I. **B.** Sai ở Bước III. **C.** Sai từ Bước II. **D.** Bài giải đúng.

Hướng dẫn giải

Khi đặt $t=(x+1)^2$ với $-2\le x\le 1$ thì không suy ra $\sqrt{t}=x+1$ được, vì $x+1$ có thể bị âm khi $-2\le x\le -1$.

Câu 33. Một học sinh được chỉ định lên bảng làm 4 bài toán tích phân. Mỗi bài giải đúng được 2,5 điểm, mỗi bài giải sai (sai kết quả hoặc sai bước tính nguyên hàm) được 0 điểm. Học sinh đã giải 4 bài toán đó như sau:

Bài	Đề bài	Bài giải của học sinh
1	$\int\limits_0^1 e^{x^2}xdx$	$\int\limits_0^1 e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\left.\frac{e^{x^2}}{2}\right\|_0^1=\frac{e-1}{2}$
2	$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx$	$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx=\left[\ln\left\|x^2-x-2\right\|\right]_0^1=\ln 2-\ln 2=0$
3	$\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\cos xdx$	Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=\pi$ thì $t=-1$. Vậy $\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\cos xdx=2\int\limits_0^{\pi}\sin x\cos^2 xdx=-2\int\limits_1^{-1}t^2dt=\left.\frac{2t^3}{3}\right\|_{-1}^1=\frac{4}{3}$
4	$\int\limits_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx$	$\int\limits_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx=\int\limits_1^e\left[1+(4-2e)\ln x\right]d\left(\ln x\right)=\left[x+(4-2e)\ln^2 x\right]_1^e=3-e$

Số điểm mà học sinh này đạt được là bao nhiêu?

A. 5,0 điểm. **B.** 2,5 điểm. **C.** 7,5 điểm. **D.** 10,0 điểm.

Hướng dẫn giải

Bài toán 2 giải sai. Cách giải đúng là

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx=\int\limits_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx=\left.\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right|_0^1=-\frac{2}{3}\ln 2$$

Bài toán 4 ra kết quả đúng, nhưng cách tính nguyên hàm sai hoàn toàn. Lời giải đúng là:

$$\int\limits_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx=\int\limits_1^e\left[1+(4-2e)\ln x\right]d\left(\ln x\right)=\left[\ln x+(2-e)\ln^2 x\right]_1^e=3-e$$

Kinh nghiệm

Kết quả đúng thì chưa chắc bài giải đúng.

Câu 34. Cho hai hàm số liên tục f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi F và G lần lượt là một nguyên hàm của f và g trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào sau đây **luôn đúng**?

A. $\int\limits_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)g(x)\right]_a^b-\int\limits_a^b F(x)G(x)dx$.

B. $\int\limits_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]_a^b-\int\limits_a^b F(x)g(x)dx$.

C. $\int\limits_a^b f(x)G(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int\limits_a^b F(x)g(x)dx$.

D. $\int\limits_a^b f(x)G(x)dx=\left[F(x)G(x)\right]_a^b-\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Câu 35. Tích phân $I=\int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$ có giá trị bằng

A. $-e^2+1$. **B.** $3e^2-1$. **C.** $-e^2-1$. **D.** $-2e^2+1$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

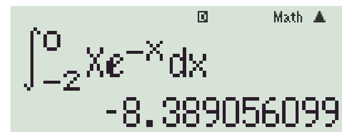
Sử dụng tích phân từng phần, ta được

$$I=\int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$$

$$=-\int_{-2}^{0} xd\left(e^{-x}\right)=-\left[\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0} e^{-x}dx\right]=-\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}+\int_{-2}^{0} e^{-x}dx=-\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(e^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}=-e^2-1.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Dùng máy tính tính $\int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$ như hình bên, thu được kết quả như hình bên. Loại được đáp án $3e^2-1$. Sau đó thử từng đáp án còn lại để tìm ra kết quả.



Câu 36. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k bất kỳ trong $\mathbb{R}$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A $\int_{a}^{b}[f(x)+g(x)]dx=\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{a}^{b} g(x)dx$. **B.** $\int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{b}^{a} f(x)dx$.

C. $\int_{a}^{b} kf(x)dx=k\int_{a}^{b} f(x)dx$. **D.** $\int_{a}^{b} xf(x)dx=x\int_{a}^{b} f(x)dx$.

Câu 37. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực dương a. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_{a}^{a} f(x)dx=1$. **B.** $\int_{a}^{a} f(x)dx=0$. **C.** $\int_{a}^{a} f(x)dx=-1$. **D.** $\int_{a}^{a} f(x)dx=f(a)$.

Câu 38. Tích phân $\int_{0}^{1} dx$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 39. Cho số thực a thỏa mãn $\int_{-1}^{a} e^{x+1}dx=e^2-1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 0. **B.** -1. **D.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\int_{-1}^{a} e^{x+1}dx=e^{x+1}\Big|_{-1}^{a}=e^{a+1}-e$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương

$$e^{a+1}-1=e^2-1 \Leftrightarrow a=1.$$

Câu 40. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có tích phân trên đoạn $[0;\pi]$ đạt giá trị bằng 0?

A. $f(x)=\cos 3x$. **B.** $f(x)=\sin 3x$.

C. $f(x)=\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $f(x)=\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tính tích phân cho từng hàm số trong các đáp án:

- $\int_0^{\pi} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^{\pi} = 0$
- $\int_0^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = 2$
- $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)dx = 4\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\left(\sqrt{2}-2\right)$
- $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)dx = -4\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$.

Vậy chọn $f(x) = \cos 3x$.

Câu 41. Tích phân nào trong các tích phân sau có giá trị **khác** 2?

A. $\int_0^{\pi} \sin x dx$. **B.** $\int_0^1 2dx$. **B.** $\int_1^{e^2} \ln x dx$. **D.** $\int_0^2 x dx$.

Câu 42. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào thỏa mãn $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx$?

A. $f(x) = \cos x$. **B.** $f(x) = \sin x$. **C.** $f(x) = e^x$. **D.** $f(x) = x+1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Tính lần lượt từng tích phân (cho đến khi nhận được kết quả đúng), ta được:

- $\int_{-1}^{1} \sin x dx = -\cos x\big|_{-1}^{1} = 0 = \int_{-2}^{2} \sin x dx$ → nhận,
- $\int_{-1}^{1} \cos x dx = \sin x\big|_{-1}^{1} = 2\sin 1$, và $\int_{-2}^{2} \cos x dx = \sin x\big|_{-2}^{2} = 2\sin 2$ → loại,
- $\int_{-1}^{1} e^x dx = e^x\big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$, và $\int_{-2}^{2} e^x dx = e^x\big|_{-2}^{2} = e^2 - e^{-2}$ → loại,
- $\int_{-1}^{1} (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 2$, và $\int_{-2}^{2} (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = 4$ → loại.

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{-1}^{1} \sin x dx - \int_{-2}^{2} \sin x dx$	0
$\int_{-1}^{1} \cos x dx - \int_{-2}^{2} \cos x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1} e^x dx - \int_{-2}^{2} e^x dx$	$\neq 0$
$\int_{-1}^{1} (x+1)dx - \int_{-2}^{2} (x+1)dx$	$\neq 0$

Vậy ta nhận đáp án $f(x) = \sin x$.

Câu 43. Tích phân $I=\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 3$. **B.** $\ln\frac{5}{2}$. **C.** $3\ln 3$. **D.** $\ln\frac{2}{5}$.

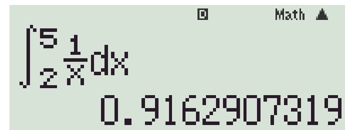
Hướng dẫn giải

[Cách 1: Phương pháp tự luận]

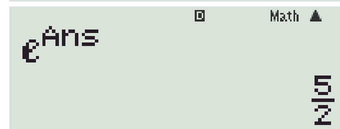
$$I=\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_2^5=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}.$$

[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,91629...$



Bước 2: Lấy $e^{0,91629...}$ cho kết quả $\frac{5}{2}$ → chọn $\ln\frac{5}{2}$.



[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}-\ln\frac{5}{2}$	0
$\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}-3\ln 3$	$\neq 0$
$\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}-\ln\frac{2}{5}$	$\neq 0$

→ chọn $\ln\frac{5}{2}$.

Câu 44. Tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ có giá trị bằng

A. $2\ln\frac{1}{3}$. **B.** $2\ln 3$. **C.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

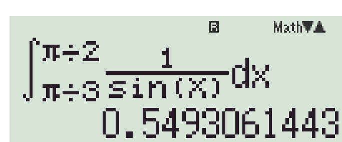
[Cách 1: Phương pháp tự luận]

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)dx.$$

$$=\left[\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\left[\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\ln\sqrt{3}.$$

[Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $0,549306...$



Bước 2: Lấy $e^{0,549306...}$ cho kết quả $1,732050808...\approx\sqrt{3}$ →

chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Thực hiện các phép tính sau trên máy tính (đến khi thu được kết quả bằng 0 thì ngưng)

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln 3$	0
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2\ln 3$	$\neq 0$

Phép tính	Kết quả
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - 2\ln \frac{1}{3}$	$\neq 0$
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln \frac{1}{3}$	$\neq 0$

→ chọn $\frac{1}{2}\ln 3$.

Nhận xét: Ở bài này cách làm bằng máy tính có vẻ nhanh hơn.

Câu 45. Nếu $\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx = K - 2e$ thì giá trị của K là

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** $12,5$.

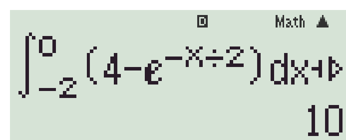
Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$K = \int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx + 2e = \left(4x+2e^{-x/2}\right)\Big|_{-2}^{0} + 2e = 2-(-8+2e)+2e = 10.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int_{-2}^{0}\left(4-e^{-x/2}\right)dx + 2e$ như hình bên, thu được giá trị $K = 10$.



Câu 46. Tích phân $I = \int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx$ có giá trị bằng

A. $-2\ln 2$. **B.** $\frac{2\ln 2}{3}$. **C.** $-\frac{2\ln 2}{3}$. **D.** Không xác định.

Hướng dẫn giải

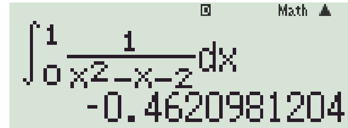
[Phương pháp tự luận]

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx = \int_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right]dx = \frac{1}{3}\left[\ln|x-2|-\ln|x+1|\right]\Big|_{0}^{1} = -\frac{2\ln 2}{3}.$$

Học sinh có thể áp dụng công thức $\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$ để giảm **một** bước tính: $I = \int_{0}^{1}\frac{1}{x^2-x-2}dx = \int_{0}^{1}\frac{1}{(x-2)(x+1)}dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_{0}^{1} = -\frac{2\ln 2}{3}$

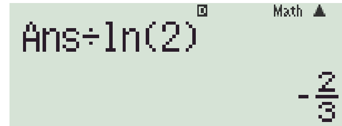
[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Dùng máy tính như hình bên, thu được giá trị $-0.4620981...$



Bước 2: Loại đáp án dương $\frac{2\ln 2}{3}$ và loại đáp án nhiễu "Không xác định".

Bước 3: Chia giá trị $-0.4620981...$ cho $\ln 2$, nhận được $-\frac{2}{3}$



→ chọn $-\frac{2\ln 2}{3}$.

Câu 47. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^5 g(x)dx = -4$. Giá trị của $\int_1^5 [g(x) - f(x)]dx$ là

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

$$\int_1^5 [g(x)-f(x)]dx = \int_1^5 g(x)dx - \int_1^5 f(x)dx = -4-2 = -6.$$

Câu 48. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì tích phân $\int_0^3 [x-2f(x)]dx$ có giá trị bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^3 [x-2f(x)]dx = \int_0^3 xdx - 2\int_0^3 f(x)dx = \frac{9}{2} - 2\times 2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 49. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. -9. **B.** 5. **C.** 9. **D.** -5.

Hướng dẫn giải

$$\int_3^5 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -7+2 = -5.$$

Câu 50. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_1^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2$.

B. $\int_1^3 e^x dx = \left(e^x\right)\Big|_1^3$.

C. $\int_\pi^{2\pi} \cos x dx = (\sin x)\Big|_\pi^{2\pi}$.

D. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$.

Hướng dẫn giải

Phép tính $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$ là sai. Phép tính đúng là $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx = \left(\ln|x|\right)\Big|_{-3}^{-2}$.

Câu 51. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ có một nguyên hàm là hàm F trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai** ?

A. $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in(a;b)$.

B. $\int\limits_a^b f(x)dx=f(b)-f(a)$.

C. $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

D. Hàm số G cho bởi $G(x)=F(x)+5$ cũng thỏa mãn $\int\limits_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$.

Câu 52. Xét hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c tùy ý. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx-\int\limits_c^b f(x)dx$.

B. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$.

C. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_c^b f(x)dx-\int\limits_c^a f(x)dx$.

D. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx-\int\limits_b^c f(x)dx$.

Câu 53. Xét hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$.Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $f(x)\ge m\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge m(a-b)$.

B. Nếu $f(x)\ge m\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge m(b-a)$.

C. Nếu $f(x)\le M\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

D. Nếu $m\le f(x)\le M\ \forall x\in[a;b]$ thì $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(a-b)$.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề "Nếu $f(x)\ge M\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge M(a-b)$" sai, mệnh đề đúng phải là

"Nếu $f(x)\ge M\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge M(b-a)$".

Câu 54. Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho $g(x)\ne 0$ với mọi $x\in[a;b]$. Một học sinh lên bảng và phát biểu các tính chất sau:

I. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx$.

II. $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^b g(x)dx$.

III. $\int\limits_a^b [f(x).g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx.\int\limits_a^b g(x)dx$.

IV. $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}dx=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}$.

Trong số các phát biểu trên, có bao nhiêu phát biểu **sai**?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Các phát biểu $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ và $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$ là sai.

Câu 55. Tích phân $\int_0^3 x(x-1)dx$ có giá trị bằng với tích phân nào trong các tích phân dưới đây ?

A. $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$. **B.** $3\int_0^{3\pi} \sin xdx$. **C.** $\int_0^2 \left(x^2+x-3\right)dx$. **D.** $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Tính rõ từng phép tính tích phân để tìm ra kết quả đúng (Chỉ tính đến khi nhận được kết quả đúng thì dừng lại):

- $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^{\ln\sqrt{10}} = \frac{e^{2\ln\sqrt{10}}-1}{2} = \frac{9}{2}$,
- $3\int_0^{3\pi} \sin xdx = -3\cos x|_0^{3\pi} = 6$,
- $\int_0^2 \left(x^2+x-3\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x\right)\right|_0^2 = \frac{8}{3}+2-6 = -\frac{4}{3}$,
- $\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+\pi)|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(\sin 4\pi - \sin\pi) = 0$.

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$	0
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{3\pi} \sin xdx$	$-\frac{3}{2}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^2 \left(x^2+x-3\right)dx$	$\frac{35}{6}$
$\int_0^3 x(x-1)dx - \int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)dx$	$\frac{9}{2}$

Vậy chọn $\int_0^{\ln\sqrt{10}} e^{2x}dx$.

Câu 56. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[-3;3]$, luôn có $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$.

B. Với mọi hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

C. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, sao cho $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ thì $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$.

D. Với mọi hàm số f liên tục trên đoạn $[1;5]$ thì $\int_1^5 [f(x)]^2\, dx = \left.\frac{[f(x)]^3}{3}\right|_1^5$.

Hướng dẫn giải

Vì $d(-x) = (-1)dx$ nên $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(x)(-1)dx = \int_b^a f(x)d(-x)$.

Câu 57. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$.

B. Nếu $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

C. Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.

D. Nếu $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

- Hàm số $y = x^3 - \frac{x}{2}$ thỏa $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, nhưng nó là hàm lẻ trên $[-1;1]$.
- Hàm số $y = x^2 - \frac{1}{3}$ thỏa $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, nhưng nó làm hàm chẵn trên $[-1;1]$.
- Còn khi f là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) = f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$ và suy ra

$$\int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)(-1)dx = -\int_0^1 f(x)d(-x)$$
$$= -\int_0^1 f(-x)d(-x) = -\int_0^{-1} f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt.$$

Câu 58. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx$ có giá trị bằng

A. $F(2) - F(1)$. **B.** $-F(1)$. **C.** $F(2)$. **D.** $F(2) + F(1)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a;b]$, ta có $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}dx = F(2) - F(1)$.

Câu 59. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai số thực $a<b$. Nếu $\int_a^b f(x)dx=\alpha$ thì tích phân $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$ có giá trị bằng

A. α. **B.** 2α. **C.** $\frac{\alpha}{2}$. **D.** 4α.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx$ và

x	$a/2$	$b/2$
t	a	b

Vậy $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_{a/2}^{b/2} f(2x)2dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt=\frac{\alpha}{2}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Phương pháp tự luận tốt hơn cả, nhưng nếu học sinh không nắm rõ, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[0;1]$ và tính toán.

Ví dụ $f(x)=x$ với $x\in[0;1]$. Khi đó $\alpha=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$

suy ra $\int_0^{1/2} f(2x)dx=\int_0^{1/2} 2xdx=\frac{1}{4}=\frac{\alpha}{2}$.

Câu 60. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{\sin x}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_1^2 \frac{\sin 3x}{x}dx$ có giá trị bằng

A. $F(6)-F(3)$. **B.** $3\left[F(6)-F(3)\right]$. **C.** $3\left[F(2)-F(1)\right]$. **D.** $F(2)-F(1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3x \Rightarrow dt=3dx$ và

x	1	2
t	3	6

Vậy $\int_1^2 \frac{\sin 3x}{x}dx=\int_1^2 \frac{\sin 3x}{3x}3dx=\int_3^6 \frac{\sin t}{t}dt=F(6)-F(3)$.

Câu 61. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx=6$. Giá trị của $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=2\sin x \Rightarrow dt=2\cos xdx$ và

x	0	$\pi/2$
t	0	2

Vậy $\int_0^{\pi/2} f(2\sin x)\cos xdx=\int_0^2 \frac{f(t)}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=3$.

Câu 62. Bài toán tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t=\ln x+1$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$ và

x	1	e
t	1	2

II. $I=\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}\ln x}{x}dx=\int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt$

III. $I=\int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt=\left(\sqrt{t^5}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)\Big|_1^2=1+3\sqrt{2}$.

Vậy học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Bài giải đúng. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Sai ở Bước III.

Hướng dẫn giải

Bước III sai. Phép tính đúng là $I=\int_1^2 \sqrt{t}(t-1)dt=\left(\frac{2}{5}\sqrt{t^5}-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^2=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

Câu 63. Xét tích phân $I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t=\cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây

A. $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$. **B.** $I=\int_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$. **C.** $I=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2t}{1+t}dt$. **D.** $I=-\int_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $t=\frac{1}{2}$. Vậy

$$I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\pi/3}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}dx=-\int_1^{1/2}\frac{2t}{1+t}dt=\int_{1/2}^{1}\frac{2t}{1+t}dt.$$

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ bất kỳ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b |f(x)|dx$.

B. $\int_a^b |f(x)|dx\ge\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

C. $\int_a^b |f(x)|dx>\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

D. $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b |f(x)|dx$.

Câu 65. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_0^1 (1+x)^x dx=0$.

B. $\int_0^1 \sin(1-x)dx=\int_0^1 \sin xdx$.

C. $\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\pi/2}\sin xdx$.

D. $\int_{-1}^{1}x^{2017}(1+x)dx=\frac{2}{2019}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1: Tính trực tiếp các tích phân]

- Đặt $t=1-x \Rightarrow dt=-dx \Rightarrow \int_0^1 \sin(1-x)dx = -\int_1^0 \sin t dt = \int_0^1 \sin t dt$

- Đặt $t=\frac{x}{2} \Rightarrow dt=\frac{1}{2}dx \Rightarrow \int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = \int_0^{\pi/2} 2\sin t dt$

- $\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx = \left(\frac{x^{2018}}{2018}+\frac{x^{2019}}{2019}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^{2018}}{2018}+\frac{1^{2019}}{2019}\right)-\left(\frac{(-1)^{2018}}{2018}+\frac{(-1)^{2019}}{2019}\right)=\frac{2}{2019}$

Vậy $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$ sai.

[Cách 2: Nhận xét tích phân]

Ta thấy $(1+x)^x \geq 1$ với mọi $x\in[0;1]$ nên $\int_0^1 (1+x)^x dx \geq \int_0^1 1dx = 1$, vậy "$\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$" là khẳng định sai.

[Cách 3: Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập các phép tính sau vào máy tính để thu kết quả:

Phép tính	Kết quả
$\int_0^1 (1+x)^x dx$	>0
$\int_0^1 \sin(1-x)dx - \int_0^1 \sin x dx$	0
$\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx - 2\int_0^{\pi/2} \sin x dx$	0
$\int_{-1}^{1} x^{2017}(1+x)dx - \frac{2}{2019}$	0

suy ra $\int_0^1 (1+x)^x dx = 0$ là khẳng định sai.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)$ lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **luôn đúng**?

A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2\int_0^2 f(x)dx$.

B. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx$.

C. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

D. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Với hàm số f bất kỳ và số thực dương a, ta luôn nằm lòng 2 tính chất sau đây:

- Nếu f là hàm số lẻ trên đoạn [-$a;a$] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,

- Nếu f là hàm số chẵn trên đoạn [-$a;a$] thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Vậy trong bài này ta chọn $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nếu học sinh không nắm rõ hai tính chất kể trên, có thể thay f bởi một hàm số đơn giản, xác định trên $[-2;2]$ và tính toán. Ví dụ $f(x)=x$ với $x\in[-2;2]$. Khi đó

- $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=0$,
- $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx\neq 2\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$,
- $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx\neq 2\int\limits_{-2}^{0} f(x)dx$,
- $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx\neq -2\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$.

Vậy chọn $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=0$.

Câu 67. Bài toán tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{1}(x+1)^2dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ $t=(x+1)^2$, suy ra $dt=2(x+1)dx$,

II. Từ đây suy ra $\dfrac{dt}{2(x+1)}=dx \Rightarrow \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}=dx$. Bảng giá trị

x	-2	1
t	1	4

III. Vậy $I=\int\limits_{-2}^{1}(x+1)^2dx=\int\limits_{1}^{4}\dfrac{t}{2\sqrt{t}}dt=\dfrac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4=\dfrac{7}{3}$.

Vậy học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai ở Bước III. **B.** Sai từ Bước II. **C.** Sai từ Bước I. **D.** Bài giải đúng.

Hướng dẫn giải

Khi đặt $t=(x+1)^2$ với $-2\le x\le 1$ thì không suy ra $\sqrt{t}=x+1$ được, vì $x+1$ có thể bị âm khi $-2\le x\le -1$.

Câu 68. Một học sinh được chỉ định lên bảng làm 4 bài toán tích phân. Mỗi bài giải đúng được 2,5 điểm, mỗi bài giải sai (sai kết quả hoặc sai bước tính nguyên hàm) được 0 điểm. Học sinh đã giải 4 bài toán đó như sau:

Bài	Đề bài	Bài giải của học sinh
1	$\int\limits_0^1 e^{x^2}xdx$	$\int\limits_0^1 e^{x^2}xdx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\dfrac{e^{x^2}}{2}\Big\|_0^1=\dfrac{e-1}{2}$
2	$\int\limits_0^1\dfrac{1}{x^2-x-2}dx$	$\int\limits_0^1\dfrac{1}{x^2-x-2}dx=\left[\ln\left\|x^2-x-2\right\|\right]\Big\|_0^1=\ln 2-\ln 2=0$
3	$\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\cos xdx$	Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=\pi$ thì $t=-1$. Vậy $\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\cos xdx=2\int\limits_0^{\pi}\sin x\cos^2xdx=-2\int\limits_1^{-1}t^2dt=\dfrac{2t^3}{3}\Big\|_{-1}^{1}=\dfrac{4}{3}$
4	$\int\limits_1^e\dfrac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx$	$\int\limits_1^e\dfrac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx=\int\limits_1^e\left[1+(4-2e)\ln x\right]d(\ln x)$ $=\left[x+(4-2e)\ln^2x\right]\Big\|_1^e=3-e$

Số điểm mà học sinh này đạt được là bao nhiêu?

A. 7,5 điểm. **B.** 2,5 điểm. **C.** 5,0 điểm. **D.** 10,0 điểm.

Hướng dẫn giải

Bài toán 2 giải sai. Cách giải đúng là

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln 2$$

Bài toán 4 ra kết quả đúng, nhưng cách tính nguyên hàm sai hoàn toàn. Cách tính đúng là:

$$\int_1^e \frac{1+(4-2e)\ln x}{x}dx = \int_1^e \left[1+(4-2e)\ln x\right]d(\ln x) = \left[\ln x + (2-e)\ln^2 x\right]\Big|_1^e = 3-e$$

[Kinh nghiệm]

Kết quả đúng thì chưa chắc bài giải đúng.

Câu 69. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[a;b]$. Đẳng thức nào sau đây **luôn đúng**?

A. $\int_a^b f(x)G(x)dx = \left[F(x)g(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)G(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)G(x)dx = \left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)G(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)G(x)dx = \left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Câu 70. Tích phân $I = \int_{-2}^0 xe^{-x}dx$ có giá trị bằng

A. $-2e^2+1$. **B.** $3e^2-1$. **C.** $-e^2+1$. **D.** $-e^2-1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

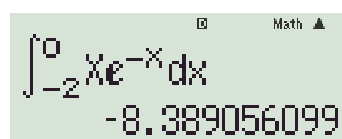
Sử dụng tích phân từng phần, ta được

$$I = \int_{-2}^0 xe^{-x}dx$$

$$= -\int_{-2}^0 xd\left(e^{-x}\right) = -\left[\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 e^{-x}dx\right] = -\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^0 + \int_{-2}^0 e^{-x}dx = -\left(xe^{-x}\right)\Big|_{-2}^0 - \left(e^{-x}\right)\Big|_{-2}^0 = -e^2-1.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int_{-2}^0 xe^{-x}dx$ như hình bên, thu được kết quả như hình bên. Loại được đáp án $3e^2-1$. Sau đó thử từng đáp án còn lại để tìm ra kết quả.



Câu 71. Ta đã biết công thức tích phân từng phần $\int_a^b F(x)g(x)dx = \left[F(x)G(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx$, trong đó F và G là các nguyên hàm của f và g. Trong các biến đổi sau đây, sử dụng tích phân từng phần ở trên, biến đổi nào là **sai**?

A. $\int_1^e (\ln x)xdx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx$, trong đó $F(x)=\ln x$, $g(x)=x$.

B. $\int_0^1 xe^x dx = \left(xe^x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$, trong đó $F(x)=x$, $g(x)=e^x$.

C. $\int_0^{\pi} x\sin x dx = (x\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos x dx$, trong đó $F(x) = x$, $g(x) = \sin x$.

D. $\int_0^1 x2^{x+1}dx = \left(x\dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{2^{x+1}}{\ln 2}dx$, trong đó $F(x) = x$, $g(x) = 2^{x+1}$.

Câu 72. Tích phân $\int_0^{\pi} x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)dx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\dfrac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

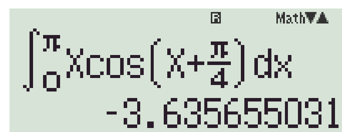
Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^{\pi} x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \left[x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \pi\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dùng máy tính tính $\int_0^{\pi} x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)dx$ như hình bên, thu được kết quả như hình bên. Loại được các đáp án dương $\dfrac{(\pi+2)\sqrt{2}}{2}$ và $\dfrac{(\pi-2)\sqrt{2}}{2}$. Sau đó thử từng đáp án còn lại để tìm ra kết quả.



Câu 73. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[0;2]$. Biết rằng $F(0) = 0$, $F(2) = 1$, $G(0) = -2$, $G(2) = 1$ và $\int_0^2 F(x)g(x)dx = 3$. Tích phân $\int_0^2 f(x)G(x)dx$ có giá trị bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -4.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_0^2 f(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]\Big|_0^2 - \int_0^2 F(x)g(x)dx = F(2)G(2) - F(0)G(0) - \int_0^2 F(x)g(x)dx$$

$$= 1\times 1 - 0\times(-2) - 3 = -2.$$

Câu 74. Cho hai hàm số liên tục f và g có nguyên hàm lần lượt là F và G trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng $F(1) = 1$, $F(2) = 4$, $G(1) = \dfrac{3}{2}$, $G(2) = 2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx = \dfrac{67}{12}$. Tích phân $\int_1^2 F(x)g(x)dx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $-\dfrac{145}{12}$. **C.** $-\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{145}{12}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_1^2 F(x)g(x)dx = [F(x)G(x)]\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)G(x)dx = F(2)G(2) - F(1)G(1) - \int_1^2 f(x)G(x)dx$$

$$= 4\times 2 - 1\times\frac{3}{2} - \frac{67}{12} = \frac{11}{12}.$$

Câu 75. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a<b$ và $\int_a^b x\sin xdx=\pi$, đồng thời $a\cos a=0$ và $b\cos b=-\pi$. Tích phân $\int_a^b \cos xdx$ có giá trị bằng

A. $\frac{145}{12}$. **B.** π. **C.** $-\pi$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\int_a^b x\sin xdx=-\left[x\cos x\right]_a^b+\int_a^b \cos xdx \Rightarrow \int_a^b \cos xdx=\left[x\cos x\right]_a^b+\int_a^b x\sin xdx$$

$$=b\cos b-a\cos a+\pi=-\pi-0+\pi=0.$$

Câu 76. Cho tích phân: $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$.Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}$.Khi đó I bằng

A. $I=\int_1^0 u^2du$. **B.** $I=-\int_1^0 u^2du$. **C.** $I=\int_1^0 \frac{u^2}{2}du$. **D.** $I=-\int_0^1 u^2du$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}\Rightarrow u^2=1-\ln x \Rightarrow \frac{dx}{x}=-2udu$. Với $x=1\Rightarrow u=1, x=e\Rightarrow u=0$.

Khi đó $I=-\int_1^0 u^2du$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm máy tính để tính $\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$

Bước 2: Bấm SHIFT STO A để lưu vào biến **A.**

Bước 3: Bấm $A-\left(-\int_1^0 u^2du\right)=0$. Vậy đáp án là **A.**

Câu 77. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}dx$ có giá trị bằng

A. $5\ln 2-6\ln 3$. **B.** $1+2\ln 2-6\ln 3$. **C.** $3+5\ln 2-7\ln 3$. **D.** $1+25\ln 2-16\ln 3$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int_1^2\left(1+\frac{16}{x-4}-\frac{9}{x-3}\right)dx=\left(x+16\ln|x-4|-9\ln|x-3|\right)\Big|_1^2=1+25\ln 2-16\ln 3$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}dx-(1+25\ln 2-16\ln 3)$ được đáp số là 0.

Câu 78. Tích phân $I=\int_1^2 x^5dx$ có giá trị là:

A. $\frac{19}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{21}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I=\int\limits_1^2 x^5dx=\left.\frac{x^6}{6}\right|_1^2=\frac{21}{2}$.

Câu 79. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}$ bằng

A. $-\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{x+1-1}{(x+1)^3}=(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}\Rightarrow I=\int\limits_0^1\left[(x+1)^{-2}-(x+1)^{-3}\right]dx=\frac{1}{8}$.

Câu 80. Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2-x)\sin xdx$. Đặt $u=2-x,\ dv=\sin xdx$ thì I bằng

A. $-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$. **B.** $-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

C. $(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$. **D.** $(2-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases}u=2-x\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-dx\\v=-\cos x\end{cases}$. Vậy $I=-(2-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.