Gọi k_1 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $(C_m): y=\frac{x+m}{x+1}$ với trục hoành. Gọi k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x=1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $|k_1+k_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

LỜI GIẢI

- Ta có: $y'=\frac{1-m}{(x+1)^2}$. Hoành độ giao điểm (C_m) với trục hoành: $x=-m$.
- Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=-m$ là $k_1=y'(-m)=\frac{1}{1-m}$.
- Hệ số góc tiếp tuyếnTại điểm có hoành độ $x=1$ là $k_2=y'(1)=\frac{1-m}{4}$.
- Ta có: $|k_1+k_2|=\left|\frac{1}{1-m}+\frac{1-m}{4}\right|=\left|\frac{1}{1-m}\right|+\left|\frac{1-m}{4}\right|\overset{\text{Cauchy}}{\geq}2\sqrt{\frac{1}{1-m}.\frac{1-m}{4}}$

  $\Leftrightarrow |k_1+k_2|\geq 1,\ \forall m\neq 1$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left|\frac{1}{1-m}\right|=\left|\frac{1-m}{4}\right|$

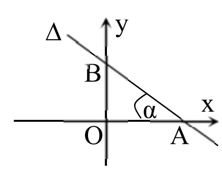
  $\Leftrightarrow (1-m)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$. Vậy $|k_1+k_2|_{\min}=1$ khi $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Viết phương trình tiếp tuyến d của $(C): y=\frac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB=\sqrt{82}.OB$?

LỜI GIẢI

Phân tích và tìm hướng giải

TT Δ cắt trục Ox, Oy tại $A, B \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O và tạo với trục Ox một góc α với $|k|=\tan\alpha=\frac{OB}{OA}$.



Ta có: $\begin{cases} AB=\sqrt{82}.OB \\ OA^2+OB^2=AB^2 \end{cases} \Rightarrow 81.OB^2=OA^2 \Leftrightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{1}{9} \Rightarrow |k|=\frac{1}{9}$.

Bài giải

- Gọi $M\left(x_o;\frac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$, $(x_o\neq 1)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k=\frac{-1}{(x_o-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến có dạng

$$\Delta: y=-\frac{1}{(x_o-1)^2}(x-x_o)+\frac{2x_o-1}{x_o-1} \qquad (i)$$

- Ta có: $\begin{cases} AB=\sqrt{82}.OB \\ OA^2+OB^2=AB^2 \end{cases} \Rightarrow AB^2=82.OB^2=OA^2+OB^2 \Leftrightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{1}{9}$.
- Hệ số góc tiếp tuyến được tính $|k|=\tan\alpha=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{9} \Leftrightarrow k=\frac{1}{9} \vee k=-\frac{1}{9}$.

- Với $k=\frac{1}{9}=\frac{-1}{(x_o-1)^2}$: phương trình vô nghiệm.
- Với $k=-\frac{1}{9}=\frac{-1}{(x_o-1)^2}\Leftrightarrow(x_o-1)=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_o=4\\x_o=-2\end{array}\right.$ (ii)

$(i),(ii)\Rightarrow\Delta:y=-\frac{1}{9}x+\frac{25}{9}$ hoặc $\Delta:y=-\frac{1}{9}x+\frac{13}{9}$ là các tiếp tuyến cần tìm.

Lập phương trình tiếp tuyến của $(C):y=x^3-3x^2+1,$ biết nó song song với đường thẳng $d:9x-y+6=0$?

LỜI GIẢI

- Ta có: $y'=3x^2-6x$. Gọi $M(x_o;y_o)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$\Delta:y=k(x-x_o)+y_o$. Do tiếp tuyến $\Delta\,//\,d:y=9x+6\Rightarrow k=9$

$$\Leftrightarrow y'(x_o)=9\Leftrightarrow 3x_o^2-6x_o=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_o=-1\Rightarrow y_o=-3\\x_o=3\Rightarrow y_o=1\end{array}\right..$$

- Với $x_o=-1$; $y_o=-3$; $k=9\Rightarrow\Delta:y=9x+6$ (loại do $\Delta\equiv d$).
- Với $x_o=3$; $y_o=1$; $k=9\Rightarrow\Delta:y=9(x-3)+1$ hay $\Delta:y=9x-26$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C):y=-x^4-x^2+6,$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d:y=\frac{1}{6}x-1$?*Đại học khối D năm 2010*

LỜI GIẢI

- Ta có: $y'=-4x^3-2x$. Gọi $M(x_o;y_o)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$\Delta:y=k(x-x_o)+y_o$. Do $\Delta\perp d:y=\frac{1}{6}x-1\Rightarrow k.\frac{1}{6}=-1$

$$\Leftrightarrow k=y'(x_o)=-6\Leftrightarrow -4x_o^3-2x_o=-6\Leftrightarrow x_o=1\Rightarrow y_o=4.$$

- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta:y=-6(x-1)+4$ hay $\Delta:y=-6x+10$.

Gọi $M\in(C):y=\frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại A và B. Tính $S_{\Delta OAB}$?   ***Cao đẳng khối A, A₁, B, D năm 2013***

LỜI GIẢI

✍ **Phân tích và tìm hướng giải**

Viết PTTT Δ tại M khi biết $y_o=5=\frac{2x_o+1}{x_o-1}\Rightarrow x_o\Rightarrow k=y'(x_o)$. Tìm tọa độ $A=\Delta\cap Ox,\ B=\Delta\cap Oy$ và tính $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=$?

Bài giải

- Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$ và $y_o=5=\frac{2x_o+1}{x_o-1}\Rightarrow x_o=2\Rightarrow k=y'(x_o)=-3$.

- Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;5)$ là $\Delta: y=-3x+11$.
- Ta có: $A=\Delta\cap Ox$ thỏa $\begin{cases}\Delta: y=-3x+11\\ Ox: y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{11}{3}\\ y=0\end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{11}{3};0\right)$.
- Ta lại có: $B=\Delta\cap Oy$ thỏa $\begin{cases}\Delta: y=-3x+11\\ Oy: x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=11\end{cases} \Rightarrow B(0;11)$.

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{11}{3}.11=\dfrac{121}{6}$ (đvdt)

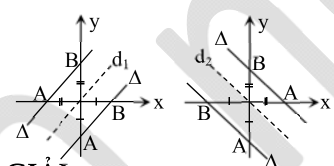
Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x+2}{2x+3}$, biết rằng tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O ?***Đại học khối A năm 2009***

Phân tích và tìm hướng giải

Tiếp tuyến $\Delta\cap Ox=\{A\}$, $\Delta\cap Oy=\{B\}$ mà ΔOAB vuông cân tại O $\Rightarrow$ Δ song song với phương trình đường thẳng phân

giác góc phần tư thứ I $(d_1: y=x)$ và thứ II

$(d_2: y=-x) \Rightarrow k=\pm1 \Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow \Delta$.



LỜI GIẢI

- Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(2x+3)^2}$. Gọi $M(x_o;y_o)$ là tiếp điểm và tiếp tuyến là Δ.
- Theo đề $\Rightarrow \Delta // d_{1,2}: y=\pm x \Rightarrow k=y'(x_o)=\dfrac{-1}{(2x_o+3)^2}=\pm1$

$\Leftrightarrow (2x_o+3)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_o=-1\Rightarrow y_o=1\Rightarrow k=-1\\ x_o=-2\Rightarrow y_o=0\Rightarrow k=-1\end{array}\right.$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta: y=-1(x+1)+1\\ \Delta: y=-1(x+2)+0\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=-x\\ \Delta: y=-x-2\end{array}\right.$ (loại do $\equiv d: y=-x$)

- Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta: y=-x-2$.

Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị hàm số (C) sao cho Δ cắt trục hoành tại A mà $OA=6$?

Phân tích và tìm hướng giải

Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ tt $\Delta: y=\dfrac{-1}{(x_o-2)^2}(x-x_o)+\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$

$\Delta\cap Ox=\{A\}\Rightarrow$ tọa độ điểm A theo $x_o \to$ giải $OA=6\Rightarrow x_o \Rightarrow$ tt Δ.

LỜI GIẢI

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$. Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}\right)\in(C)$, $(x_o\neq2)$ là tiếp điểm.

- Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y=\dfrac{-1}{(x_o-2)^2}(x-x_o)+\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$ (i)

- Ta có: $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow y=0\Rightarrow 0=\dfrac{-1}{\left(x_o-2\right)^2}\left(x-x_o\right)+\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$

  $\Leftrightarrow x=2x_o^2-6x_o+6\Rightarrow A\left(2x_o^2-6x_o+6;0\right)$.
- Theo đề $OA=6\Leftrightarrow\left|2x_o^2-6x_o+6\right|=0\Rightarrow x_o=0\ \vee\ x_o=3$ $\quad\quad(ii)$
- Thế (ii) vào $(i)\Rightarrow$ các tiếp tuyến cần tìm là: $\left[\begin{array}{l}\Delta: y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}\\ \Delta: y=-x+6\end{array}\right.$.

> Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=x^3-6x^2+9x$, biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $\Delta: x+y+1=0$ một góc α, sao cho $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$ và tiếp điểm có hoành độ nguyên ?

Phân tích và tìm hướng giải

Gọi $M\left(x_o;x_o^3-6x_o^2+9x_o\right)$ là tiếp điểm thì $k=y'\left(x_o\right)=3x_o^2-12x_o+9$ và có $\Delta: y=-x-1\Rightarrow k_\Delta=-1$. Khi đó ta có hai hướng xử lý: một là áp dụng công thức $\tan\alpha=\left|\dfrac{k-k_\Delta}{1+k.k_\Delta}\right|$, hai là sử dụng $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta};\overrightarrow{n_d}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_d}\right|}$ với $\overrightarrow{n_\Delta}=(1;1)$ và $\overrightarrow{n_d}=(k;-1)$ là véctơ pháp tuyến của Δ và tiếp tuyến d.

LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o;x_o^3-6x_o^2+9x_o\right)$ là tiếp điểm và $k=y'\left(x_o\right)=3x_o^2-12x_o+9$.
- Phương trình tiếp tuyến có dạng $d: y=k\left(x-x_o\right)+x_o^3-6x_o^2+9x_o$ và có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_d}=(k;-1)$.

Ta có: $\overrightarrow{n_\Delta}=(1;1)$.

- Theo đề: $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta};\overrightarrow{n_d}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_d}\right|}=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$

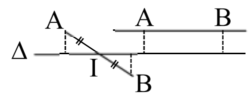
  $\Leftrightarrow 9k^2-82k+9=0\Leftrightarrow k=9\ \vee\ k=\dfrac{1}{9}$.
- Với $k=9\Rightarrow 3x_o^2-12x_o=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_o=0\Rightarrow y_o=0\\ x_o=4\Rightarrow y_o=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta: y=9x\\ \Delta: y=9x-32\end{array}\right.$.
- Với $k=\dfrac{1}{9}\Rightarrow 3x_o^2-12x_o+9=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow x_o=\dfrac{18\pm2\sqrt{21}}{9}$ (loại do $x_o;y_o\in$ ¢).
- Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta: y=9x$ hoặc $\Delta: y=9x-32$.

> Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, biết tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(-2;4)$ và $B(4;-2)$?

Phân tích và tìm hướng giải

hoc360.net

Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ tt $\Delta: y=\dfrac{-1}{(x_o-1)^2}(x-x_o)+\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}$. Do Δ cách đều hai điểm A và B nên có các trường hợp sau đây xảy ra: tiếp tuyến Δ qua trung điểm I của AB $(I\in\Delta)$ hoặc song song với AB hoặc trùng với AB $(k=k_{AB})$. Giải hai trường hợp $\Rightarrow x_o \Rightarrow \Delta$.



LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$, $(x_o\neq 1)\Rightarrow$ tiếp tuyến $\Delta: y=\dfrac{x_o-x}{(x_o-1)^2}+\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}$ (i)
- Do tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(-2;4)$ và $B(4;-2)$ nên có các trường hợp:

Trường hợp 1. Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(1;1)\in\Delta$

$\Leftrightarrow 1=\dfrac{x_o-1}{(x_o-1)^2}+\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}\Leftrightarrow x_o=-1\Rightarrow \Delta: y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Trường hợp 2. Δ // AB hoặc $\Delta\equiv AB\Rightarrow k=k_{AB}$.

Phương trình đường thẳng $AB: y=-x+2\Rightarrow k_{AB}=-1=k=-\dfrac{1}{(x_o-1)^2}$

$\Leftrightarrow x_o=2\vee x_o=0$. Thế vào (i) được $\Delta: y=-x+5$ hoặc $\Delta: y=-x+1$.

- Vậy $\Delta: y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ hoặc $\Delta: y=-x+5$ hoặc $\Delta: y=-x+1$.

Xác định m để đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+m}{x-1}$ có tiếp tuyến song song và cách đường thẳng $d: 3x+y-1=0$ một khoảng cách bằng $\sqrt{10}$?

Phân tích và tìm hướng giải

$M\left(x_o;\dfrac{2x_o+m}{x_o-1}\right)\in(C)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k=\dfrac{-2-m}{(x_o-1)^2}$. Do Δ // d $\Rightarrow k=-3$ sẽ thu được một phương trình với hai ẩn x_o, m và $d(M;d)=\sqrt{10}$ sẽ thu thêm được một phương trình nữa. Giải hệ này tìm được $\Rightarrow x_o, m$.

LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o+m}{x_o-1}\right)$, $(x_o\neq 1)$ và tiếp tuyến Δ có $k=\dfrac{-2-m}{(x_o-1)^2}=-3$ (do tiếp tuyến Δ // $d: y=-3x+1$)

$\Leftrightarrow 3x_o^2-6x_o-m+1=0$ (i)

- Vì $d(\Delta;d)=d(M;d)=\sqrt{10}\Rightarrow\left|3x_o+\dfrac{2x_o+m}{x_o-1}\right|=10$ (ii)

$$(i),(ii)\Rightarrow\begin{cases}3x_o^2-11x_o+m+10=0\\3x_o^2-6x_o-m+1=0\end{cases}\vee\begin{cases}3x_o^2+9x_o+m-10=0\\3x_o^2-6x_o-m+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_o=1\ (L)\\x_o=\dfrac{11}{6}\Rightarrow m=\dfrac{1}{12}\end{cases}\vee\begin{cases}x_o=1\ (L)\\x_o=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=\dfrac{67}{4}\end{cases}.$$

hoc360.net

- Vậy $m = \frac{1}{12} \vee m = \frac{67}{4}$ là các giá trị cần tìm.

hoc360.net