5.ĐẠO HÀM CẤP CAO

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$. Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$. Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$, tức là ta có:

$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'\left(n\in N, n>1\right)$.

2.Đạo hàm cấp 2 của hàm số f(t) là gia tốc tức thời của chuyển động s=f(t) tại thời điểm t.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số.

1.PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng trực tiếp định nghĩa: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$ để tính đạo hàm đến cấp mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ: Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau:

a). $y=x\sin 2x,\left(y'''\right)$ b). $y=\cos^2 x,\left(y'''\right)$ c). $y=x^4+4x^3-3x^2+1,\left(y^{(n)}\right)$

d). $y=x^4-\sin 2x,\left(y^{(4)}\right)$ e). $y=\sin^2 2x,\left(y^{(5)}\right)$ f). $y=\dfrac{3x-1}{x+2},\left(y^{(4)}\right)$

LỜI GIẢI

a). Có $y'=x'\sin 2x+x.(\sin 2x)'=\sin 2x+2x\cos 2x$

$\Rightarrow y''=(\sin 2x)'+(2x)'\cos 2x+2x(\cos 2x)'=4\cos 2x-4x\sin 2x$

$\Rightarrow y'''=4(\cos 2x)'-(4x)'\sin 2x-4x(\sin 2x)'=-8\sin 2x-4\sin 2x-8\cos 2x$

$=-12\sin 2x-8\cos 2x$.

b). Ta có $y=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\Rightarrow y'=-\sin 2x$

$\Rightarrow y''=-2\cos 2x\Rightarrow y'''=4\sin 2x$

c). $y=x^4+4x^3-3x^2+1$

$\Rightarrow y'=4x^3+12x^2-6x\Rightarrow y''=12x^2+24x-6\Rightarrow y'''=24x+24$

$\Rightarrow y^{(4)}=24\Rightarrow y^{(5)}=0\Rightarrow ...\Rightarrow y^{(n)}=0$.

d). $y=x^4-\sin 2x$

$\Rightarrow y'=4x^3-2\cos 2x\Rightarrow y''=12x^2+4\sin 2x$

$\Rightarrow y'''=24x+8\cos 2x\Rightarrow y^{(4)}=24-16\sin 2x$

e). $y=\sin^2 2x=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos 4x\right)$

$\Rightarrow y'=2\sin 4x\Rightarrow y''=8\cos 4x\Rightarrow y'''=-32\sin 4x$

$\Rightarrow y^{(4)}=-128\cos 4x\Rightarrow y^{(5)}=512\sin 4x$

f). $y=\dfrac{3x-1}{x+2},\left(y^{(4)}\right)$

$\Rightarrow y' = \dfrac{7}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{-7\left[(x+2)^2\right]'}{(x+2)^4} = \dfrac{-14}{(x+2)^3}$

$\Rightarrow y''' = \dfrac{14\left[(x+2)^3\right]'}{(x+2)^6} = \dfrac{42}{(x+2)^4} \Rightarrow y^{(4)} = \dfrac{-42\left[(x+2)^4\right]'}{(x+2)^8} = \dfrac{-168}{(x+2)^5}$

DẠNG 2: Tìm đạo hàm cấp n của một hàm số

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Tính y', y'', y'''. Dựa vào các đạo hàm vừa tính, dự đoán công thức tính $y^{(n)}$.

Bước 2: Chứng minh công thức vừa dự đoán là đúng bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý: Cần phân tích kĩ các kết quả của đạo hàm y', y'', y''' tìm ra quy luật để dự đoán công thức $y^{(n)}$ chính xác.

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin x \left(n \in N^*\right)$

LỜI GIẢI

Bước 1: Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + 1.\dfrac{\pi}{2}\right); y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\dfrac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) \quad (1), \forall n \in N^*$

Bước 2: Chứng minh (1) bằng quy nạp:

* $n = 1 : (1)$ hiển nhiên đúng.

* Giả sử (1) đúng với $n = k \ge 1$ nghĩa là ta có: $y^k = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$ ta phải chứng minh (1) cúng đúng với $n = k+1$ nghĩa là ta phải chứng minh

$y^{(k+1)} = \sin\left(x + (k+1)\dfrac{\pi}{2}\right) \quad (2)$

Thật vậy : vế trái $(2) = y^{k+1} = \left[y^k\right]' = \left[\sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\dfrac{\pi}{2}\right) =$ =vế phải (2)

$\Rightarrow (2)$ đúng, nghĩa là (1) đúng với $n = k+1$.

Bước 3: theo nguyên lí quy nạp suy ra $y^n = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right), \forall n \in N^*$.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{1}{x+3}\left(n \in N^*\right)$

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = (-1)' \dfrac{1}{(x+3)^2} = (-1)' \dfrac{1!}{(x+3)^2};$

$y'' = (-1)^2 . \dfrac{1.2}{(x+3)^3} = (-1)^2 . \dfrac{2!}{(x+3)^3}.$

Dự đoán: $y^n = (-1)^n \dfrac{n!}{(x+3)^{n+1}} \quad (1), \forall n \in N^*.$

Chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp:

$*n=1:(1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n=k\geq 1$, nghĩa là ta có: $y^k=(-1)^k\dfrac{k!}{(x+3)^{k+1}}$ ta phải chứng minh (1) cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là ta phải chứng minh:

$$y^{k+1}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}} \quad (2)$$

Thật vậy: vế trái

$$(2)=y^{k+1}=\left[y^k\right]'=\left[(-1)^k\frac{k!}{(x+3)^{k+1}}\right]'=(-1)^{k+1}.\frac{k!}{\left[(x+3)^{k+1}\right]^2}.\left[(x+3)^{k+1}\right]'$$

$$=(-1)^{k+1}.\frac{k!(k+1)}{(x+3)^{k+2}}=(-1)^{k+1}.\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}}=vt(2)$$

Vậy (2) đúng nghĩa là (1) đúng với $n=k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $y^n=(-1)^n.\dfrac{n!}{(x+3)^{n+1}},\forall n\in N^*$.