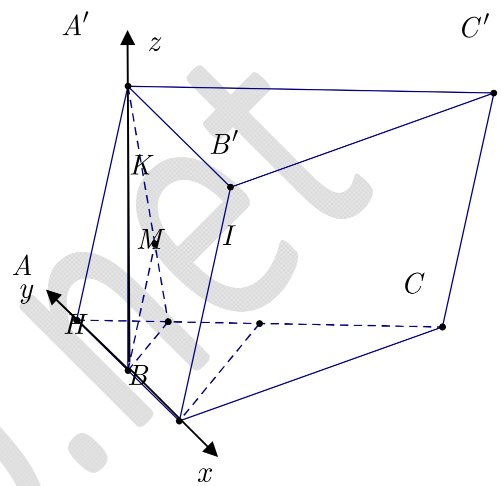
Mặt khác: $\dfrac{d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)}{d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)}=\dfrac{HA}{BA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=2HK=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$

Chọn $AC\subset\left(ACC'A'\right)$ và có $BB'//\left(ACC'A'\right)$.

nên: $d\left(AC,BB'\right)=d\left(BB',\left(ACC'A'\right)\right)=d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $A\left(-a;0;0\right)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$

Vì $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow B'\left(2a;0;a\sqrt{3}\right)$. Ta có:

$\overrightarrow{AC}=\left(a;a\sqrt{3};0\right)$; $\overrightarrow{BB'}=\left(a;0;a\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left(a;a;0\right)$

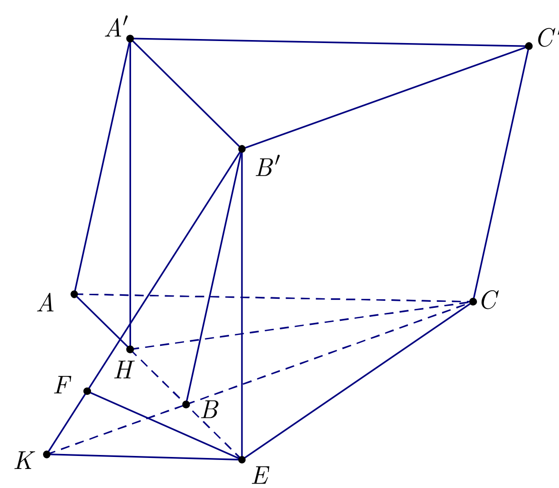
$d\left(AC,BB'\right)=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BB'}\right).\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BB'}\right|}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

Câu 45. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách hai đường chéo nhau BC và AA$'$ theo a là:

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$. B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$. D. $\dfrac{\sqrt{39}}{13}a$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Ta có: $AA'//BB'$ nên:

$d\left(AA',BC\right)=d\left(AA',\left(BCC'B'\right)\right)=d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)$

Gọi E là điểm đối xứng với H qua điểm B ta có:

$A'H//B'E$ và $B'E\perp\left(ABC\right)$.

Vì: $\dfrac{d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)}{d\left(\text{E},\left(BCC'B'\right)\right)}=\dfrac{AB}{EB}=2$.

A'

Nên: $d\left(AA',BC\right)=2d\left(E,\left(BCC'B'\right)\right)$.

Kẻ $EK\perp BC$; $EF\perp B'K$.

Chứng minh được:

$EF\perp\left(BCC'B'\right)\Rightarrow d\left(E,\left(BCC'B'\right)\right)=EF$.

Xét tam giác KEB vuông tại K và $\widehat{KBE}=60^0$ ta có: $EK=BE\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Xét tam giác $B'EK$ vuông tại E ta có: $EF=\dfrac{EK.B'E}{\sqrt{EK^2+B'E^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$.

Vậy $d\left(AA',BC\right)=2EF=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

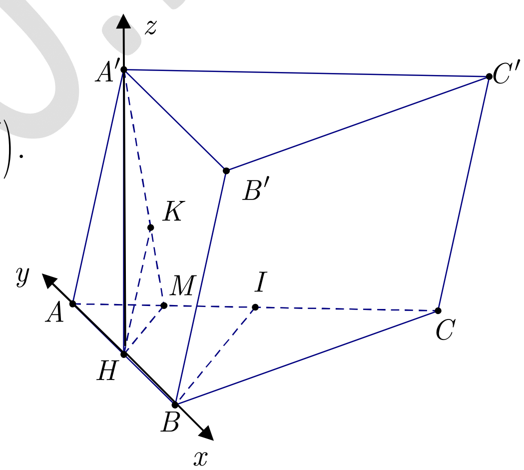
Ta có: $d\left(AA',BC\right)=d\left(AA',\left(BCC'B'\right)\right)=d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)=d\left(A,\left(BCB'\right)\right)=\dfrac{3V_{ABCB'}}{S_{BCB'}}=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{BCB'}}$

$V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{ABC}=3a^3$.

$\Delta BCB'$ có: $BC=2a; BB'=AA'=\sqrt{AH^2+A'H^2}=2a; B'C=\sqrt{B'E^2+CE^2}=a\sqrt{6}$.

Suy ra: $S_{BCB'}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}a^2$. Vậy $d\left(AA',BC\right)=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

[Cách 3]: Chọn hệ trục tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right), A\left(-a;0;0\right), C\left(0;a\sqrt{3};0\right), A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Ta có:

$\overrightarrow{BC}=\left(-a;a\sqrt{3};0\right)$; $\overrightarrow{AA'}=\left(a;0;a\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left(a;a;0\right)$

Vậy $d\left(AA',BC\right)=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AA'}\wedge\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left(\overrightarrow{AA'}\wedge\overrightarrow{BC}\right)\right|}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AC và BB'. Khi đó $\cos\varphi$:

A. $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$. B. $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$. C. $\cos\varphi=\dfrac{2}{5}$. D. $\cos\varphi=\dfrac{2}{3}$.

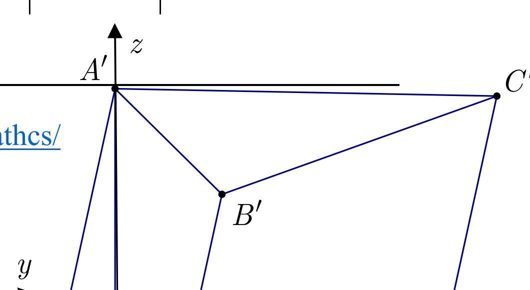
Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

Ta có: $BB'//AA'$ nên: $\cos\left(AC,BB'\right)=\cos\left(AC,AA'\right)=\left|\cos\widehat{A'AC}\right|$

Tính được: $AA'=2a$, $AC=2a, A'C=a\sqrt{6}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác $A'AC$ ta được:



$A'C^2 = A'A^2 + AC^2 - 2A'A.AC.\cos\widehat{A'AC}$

$\Rightarrow \cos\widehat{A'AC} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H(0;0;0)$, $B(a;0;0), A(-a;0;0), C(0;a\sqrt{3};0), A'(0;0;a\sqrt{3})$.

Vì $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow B'(2a;0;a\sqrt{3})$.

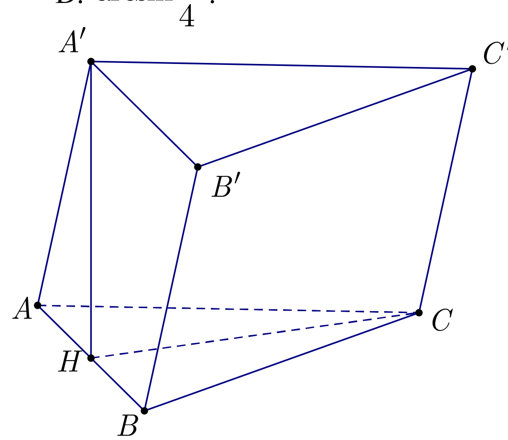
Ta có: $\overrightarrow{AC} = (a;a\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{BB'} = (a;0;a\sqrt{3})$.

Ta có: $\cos(AC, BB') = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BB'}\right|}{AC.BB'} = \dfrac{1}{4}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'C$ và (ABC) là:

A. $\dfrac{\pi}{4}$. B. $\dfrac{\pi}{6}$. C. $\dfrac{\pi}{3}$. D. $\arcsin\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải



[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

Ta có: $A'H \perp (ABC)$ nên:

CH là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên (ABC)

Khi đó:

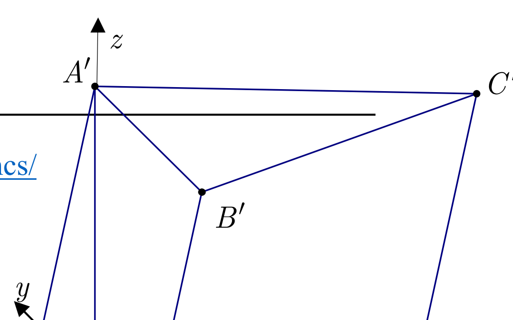
$(A'C,(ABC)) = (A'C, CH) = \widehat{A'CH}$.

Xét tam giác $A'CH$ vuông tại H ta có:

$\tan\widehat{A'CH} = \dfrac{A'H}{CH} = 1$.

Vậy $(A'C,(ABC)) = \dfrac{\pi}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right), A\left(-a;0;0\right), C\left(0;a\sqrt{3};0\right), A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng $\left(ABC\right): z=0$ có vtpt $\vec{k}=\left(0;0;1\right)$

VTCP của đường thẳng $A'C$ là:
$\vec{u}=\overrightarrow{A'C}=a\left(0;-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Khi đó: $\sin\left(A'C,\left(ABC\right)\right)=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

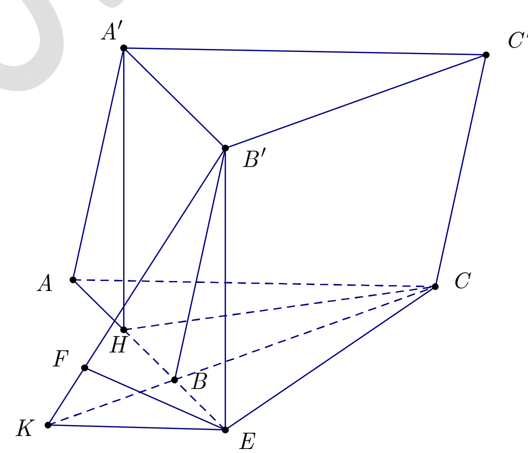
Vậy $\left(A'C,\left(ABC\right)\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 48. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính góc giữa hai mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ và $\left(ABC\right)$ là:

A. $\arctan 2$. B. $\arctan\dfrac{1}{4}$. C. $\arctan 4$. D. $\arctan\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: [Phương pháp dựng hình]



Gọi E là điểm đối xứng với H qua điểm B ta có:
$A'H//B'E$ và $B'E\perp\left(ABC\right)$
$\Rightarrow B'E=A'H=a\sqrt{3}$.
Kẻ $EK\perp BC$; $EF\perp B'K$.
Ta có: $BC\perp\left(B'EK\right)\Rightarrow BC\perp B'K$.

Khi đó: $\left(\left(BCC'B'\right),\left(ABC\right)\right)=\left(B'K,\mathrm{EK}\right)=\widehat{B'K\mathrm{E}}$

Xét tam giác KEB vuông tại K và $\widehat{KBE}=60^0$ ta có: $EK=BE\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

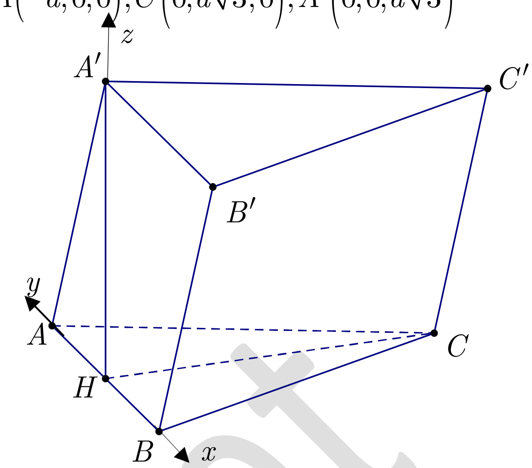
Xét tam giác $B'EK$ vuông tại E có:

$\tan\widehat{B'K\mathrm{E}}=\dfrac{B'E}{EK}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=2$.

Vậy $\left(\left(BCC'B'\right),\left(ABC\right)\right)=\arctan 2$.

Cách 2: [Phương pháp tọa độ]

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $H(0;0;0)$, $B(a;0;0), A(-a;0;0), C(0;a\sqrt{3};0), A'(0;0;a\sqrt{3})$



Mặt phẳng $(ABC): z = 0$ có vtpt $\vec{k} = (0;0;1)$.

Mặt phẳng (BCB') có vtpt:

$\vec{n} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BB'} = a^2\sqrt{3}(\sqrt{3};1;-1)$.

$$\cos((BCC'B'),(ABC)) = \frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$\Rightarrow \tan((BCC'B'),(ABC)) = 2$.

Vậy $((BCC'B'),(ABC)) = \arctan 2$.

Câu 49. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Tính khoảng cách từ điểm C' đến $(ABB'A')$ là:

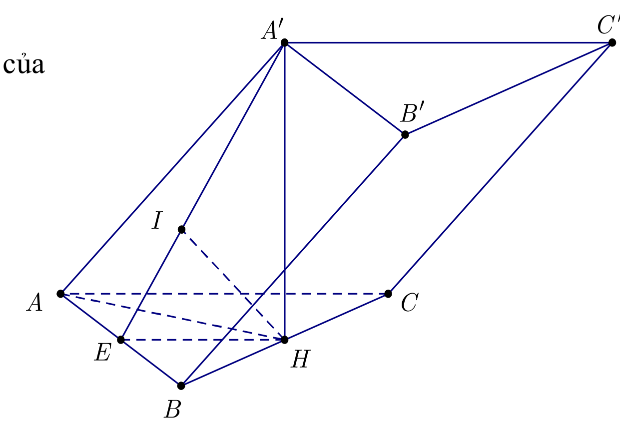
A. $\frac{2\sqrt{85}}{17}a$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}a$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{3}a$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: [Phương pháp dựng hình]

Tam giác ABC vuông tại A có: $S_{ABC} = a^2$.

$BC = a\sqrt{5}$; $AH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.



Vì $A'H \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC), khi đó:

$(AA',(ABC)) = (AA', A'H) = 30^0$.

Suy ra, $A'H = AH.\tan 30^0 = \frac{\sqrt{15}}{6}a$.

Ta có: $CC' \parallel BB'$ nên:

$d(C',(ABB'A')) = d(C,(ABB'A'))$.

Vì: $\frac{d(C,(ABB'A'))}{d(H,(ABB'A'))} = \frac{CB}{CH} = 2$.

Nên: $d(C',(ABB'A')) = 2d(H,(ABB'A'))$.

Kẻ $HE \perp AB$; $HI \perp A'E$.

Chứng minh được: $IH \perp (ABB'A') \Rightarrow d(H,(ABB'A')) = IH$. Ta có: $EH = \frac{AC}{2} = a$

Xét tam giác $A'EH$ vuông tại H ta có: $IH=\dfrac{EH.A'H}{\sqrt{EH^2+A'H^2}}=\dfrac{\sqrt{85}}{17}a$

Vậy $d\left(C',\left(ABB'A'\right)\right)=2IH=\dfrac{2\sqrt{85}}{17}a$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

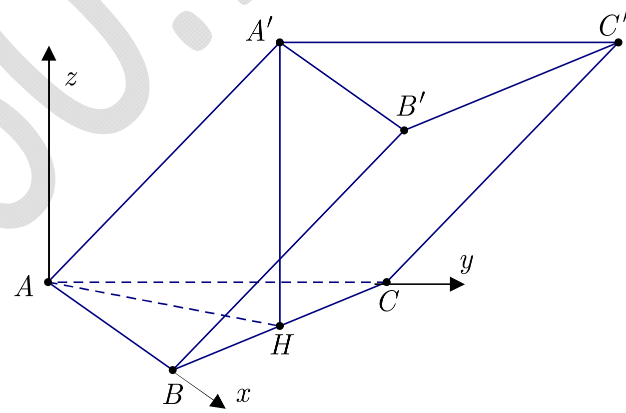
Ta có: $d\left(C',\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C',\left(ABA'\right)\right)=\dfrac{3V_{C'ABA'}}{S_{ABA'}}=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABA'}}$.

$V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}a^3$

$\Delta A'AB$ có: $AB=a; AA'=\sqrt{AH^2+A'H^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}a; A'B=\sqrt{A'H^2+BH^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}a$.

Suy ra: $S_{ABA'}=\dfrac{\sqrt{51}}{12}a^2$. Vậy $d\left(C',\left(ABB'A'\right)\right)=\dfrac{2\sqrt{85}}{17}a$.

[Cách 3]: Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;2a;0)$,

$H\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$, $A'\left(\dfrac{a}{2};a;\dfrac{\sqrt{15}}{6}a\right)$.

Vì $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow C'\left(\dfrac{a}{2};3a;\dfrac{\sqrt{15}}{6}a\right)$.

Phương trình mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ là:

$\sqrt{15}.y-6z=0$.

Vậy $d\left(C',\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C',\left(ABA'\right)\right)=\dfrac{2\sqrt{85}}{17}a$.

Câu 50. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AA' và BC là:

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}a$. D. $\dfrac{5\sqrt{29}}{7}a$.

Hướng dẫn giải

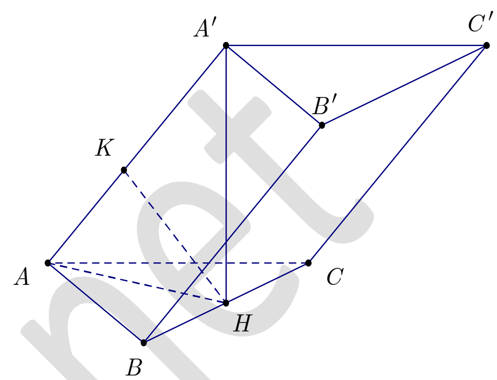
Cách 1: [Phương pháp dựng hình]

Tam giác ABC vuông cân tại A có: $S_{ABC} = \dfrac{3}{2}a^2$.

$BC = a\sqrt{6}$; $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vì $A'H \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC), khi đó:

$(AA',(ABC)) = (AA',A'H) = 30^0$.



Suy ra, $A'H = AH.\tan 30^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Kẻ $HK \perp AA'$, ta có: $HK \perp AA'$ nên: $HK \perp AA'$.

Suy ra, $d(AA',BC) = HK$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại H có:

$$HK = \frac{AH.A'H}{\sqrt{AH^2 + A'H^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

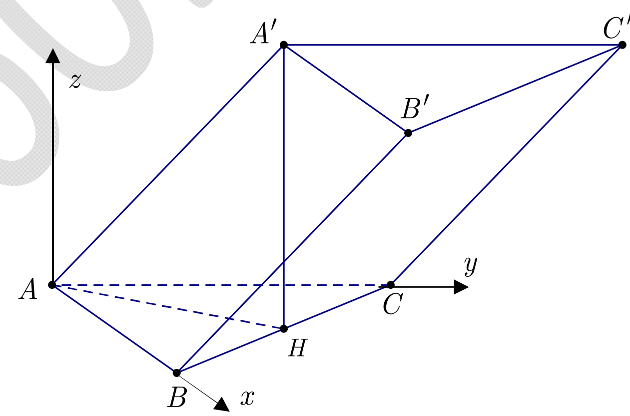
Vậy $d(AA',BC) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$A(0;0;0)$, $B(a\sqrt{3};0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$,

$H\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$.



Ta có: $\overrightarrow{AA'} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$;

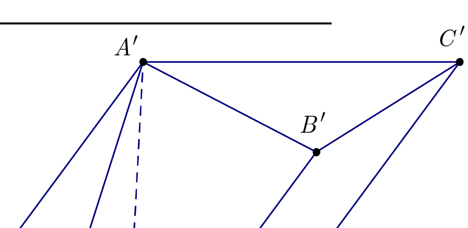
$\overrightarrow{BC} = (-a\sqrt{3};a\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{AB} = (a\sqrt{3};0;0)$

Vậy $d(AA',BC) = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left(\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{BC}\right)\right|} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

Câu 51. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, biết $AA' = 3a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là:

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{12}$. B. $\arccos\dfrac{1}{3}$. C. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. D. $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Cách 1: [Phương pháp dựng hình]

Tính được: $AI = a\sqrt{3}$; $AG = AI = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

Kẻ $GE \perp AB$. Ta có: $AB \perp A'E$

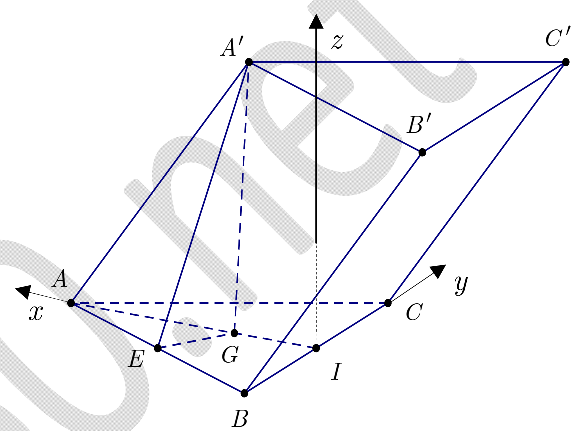
$EG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$; $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \dfrac{\sqrt{69}}{3}a$

Vậy $\left(\left(ABB'A'\right),\left(ABC\right)\right) = \left(A'E, EG\right) = \widehat{A'EG}$

Xét tam giác $A'EG$ vuông tại G ta được:

$\tan\widehat{A'EG} = \dfrac{A'G}{EG} = \sqrt{23} \Rightarrow \cos\widehat{A'EG} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$

Vậy $\left(\left(ABB'A'\right),\left(ABC\right)\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.



[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$I\left(0;0;0\right)$, $A\left(0;a\sqrt{3};0\right), C\left(a;0;0\right), B\left(-a;0;0\right)$,

$G\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0\right), A'\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{69}}{3}a\right)$.

Mặt phẳng $\left(ABC\right): z = 0$ có vtpt $\vec{k} = \left(0;0;1\right)$

Mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ có vtpt $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'} = a^2\left(-\sqrt{23};\dfrac{\sqrt{69}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ nên:

$$\cos\left(\left(ABB'A'\right),\left(ABC\right)\right) = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

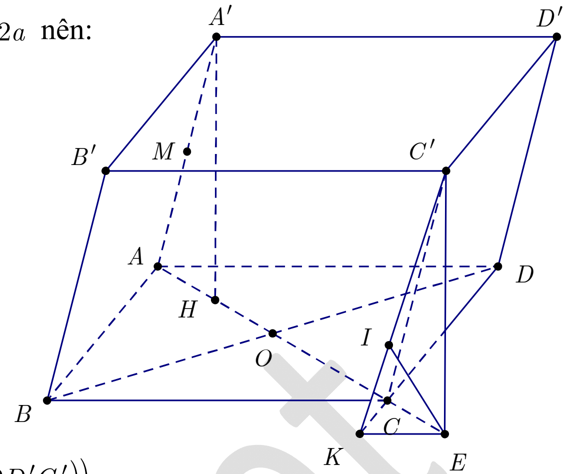
Vậy $\left(\left(ABB'A'\right),\left(ABC\right)\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

Câu 52. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB = a, BC = 2a$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của OA, AA'. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ trùng với điểm H. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $\left(CDD'C'\right)$:

A. $\dfrac{2\sqrt{285}}{19}a$. B. $\dfrac{2\sqrt{85}}{17}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{29}}{13}a$. D. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: [Phương pháp dựng hình]



Do $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB = a, BC = 2a$ nên:

$AC = a\sqrt{5}$; $OA = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$

Ta có: $A'H \perp (ABCD)$

Nên AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên $(ABCD)$, suy ra:

$\left(AA',(ABCD)\right) = (AA', AH) = \widehat{A'AH} = 60^0$

$A'H = AH.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$

Vì $AA' // (CDD'C')$ nên: $d\left(M,(CDD'C')\right) = d\left(A,(CDD'C')\right)$

Dựng hình bình hành $A'HEC'$ ta có: $C'E \perp (ABCD)$, $C'E = A'H$ và $\dfrac{d\left(A,(CDD'C')\right)}{d\left(E,(CDD'C')\right)} = \dfrac{AC}{EC} = 4$.

Suy ra, $d\left(A,(CDD'C')\right) = 4.d\left(E,(CDD'C')\right)$.

Ta có: $KE // AD$ và $AC = 4CE$ nên tính được: $KE = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác $C'KE$ vuông tại E có: $IE = \dfrac{KE.C'E}{\sqrt{KE^2 + C'E^2}} = \dfrac{\sqrt{285}}{38}a$.

Vậy $d\left(M,(CDD'C')\right) = \dfrac{2\sqrt{285}}{19}a$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = \dfrac{\sqrt{15}}{2}a^3$.

$d\left(M,(CDD'C')\right) = d\left(A,(CDD'C')\right) = d\left(A,(CDC')\right) = \dfrac{3V_{ACDC'}}{S_{CDC'}} = \dfrac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{2S_{CDC'}}$.

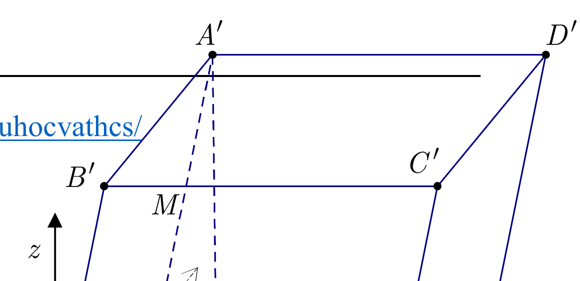
Xét tam giác CDC' ta có: $CD = a$, $CC' = AA' = \sqrt{A'H^2 + AH^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

$C'D = \sqrt{C'E^2 + ED^2} = \sqrt{C'E^2 + KD^2 + KE^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}a$.

Suy ra, $S_{CDC'} = \dfrac{\sqrt{19}}{8}a^2$.

Vậy $d\left(M,(CDD'C')\right) = \dfrac{2\sqrt{285}}{19}a$.

[Cách 3]: Chọn hệ trục tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$B\left(0;0;0\right)$, $A\left(0;a;0\right), C\left(2a;0;0\right)$,

$D\left(2a;a;0\right), H\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{3a}{4};0\right)$.

A

$A'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{3a}{4};\dfrac{\sqrt{15}}{4}a\right), M\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{7a}{8};\dfrac{\sqrt{15}}{8}a\right)$.

Vì $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C'\left(\dfrac{5a}{2};-\dfrac{a}{4};\dfrac{\sqrt{15}}{4}a\right)$;

Ta có: $\overrightarrow{CD} = \left(0;a;0\right)$; $\overrightarrow{CC'} = \left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{4};\dfrac{\sqrt{15}}{4}a\right)$; $\overrightarrow{MC} = \left(\dfrac{7a}{4};-\dfrac{7a}{8};-\dfrac{\sqrt{15}}{8}a\right)$.

Vậy $d\left(M,\left(CDD'C'\right)\right) = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CC'}\right)\overrightarrow{MC}\right|}{\left|\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CC'}\right|} = \dfrac{2\sqrt{285}}{19}a$.

CHỦ ĐỀ TỔNG HỢP

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đỉnh S cách đều các điểm A, B, C. Biết $AC = 2a$, $BC = a$, góc giữa đường thẳng SB và $mp\left(ABC\right)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách từ trung điểm M của SC đến $mp\left(SAB\right)$ theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. B. $\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$. C. $\dfrac{a\sqrt{39}}{26}$. D. $\dfrac{a\sqrt{13}}{26}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi hình chiếu của S xuống mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là H. Suy ra $SH \perp \left(ABC\right)$.

Ta có : S cách đều các điểm A, B, C nên $SA = SB = SC$.

Vì $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ (tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau)

nên $HA = HB = HC$ hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà ΔABC vuông tại B nên H là trung điểm AC.

M là trung điểm của SC nên $d\left(M,\left(SAB\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(C,\left(SAB\right)\right) = d\left(H,\left(SAB\right)\right)$

Gọi K là trung điểm $AB \Rightarrow HK \perp AB$.

Kẻ $HI \perp SK$ tại I.