



**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$  và  $D$  thuộc trục  $Oy$ . Biết  $V_{ABCD} = 5$  và có hai điểm  $D_1(0; y_1; 0), D_2(0; y_2; 0)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó  $y_1 + y_2$  bằng

- A. 1.                      B. 0.                      C. 2.                      D. 3.

**Hướng dẫn giải**

$$D \in Oy \Rightarrow D(0; y; 0)$$

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = (1; -1; 2), \overline{AD} = (-2; y-1; 1), \overline{AC} = (0; -2; 4)$$

$$\Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] = (0; -4; -2) \Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD} = -4y + 2$$

$$V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6} |-4y + 2| = 5 \Leftrightarrow y = -7; y = 8 \Rightarrow D_1(0; -7; 0), D_2(0; 8; 0) \Rightarrow y_1 + y_2 = 1$$

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2; 4), B(3; 0; -2), C(1; 3; 7)$ . Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong của góc  $A$ . Tính độ dài  $|\overline{OD}|$ .

- A.  $\frac{\sqrt{205}}{3}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{203}}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{201}}{3}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{207}}{3}$ .

**Hướng dẫn giải**

Gọi  $D(x; y; z)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 2$$

$$\text{Vì } D \text{ nằm giữa } B, C \text{ (phân giác trong) nên } \overline{DB} = -2\overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2(1-x) \\ -y = -2(3-y) \\ -2-z = -2(7-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } D\left(\frac{5}{3}; 2; 4\right) \Rightarrow |\overline{OD}| = \frac{\sqrt{205}}{3}$$

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1; 1; 1), B(5; 1; -2), C(7; 9; 1)$ . Tính độ dài phân giác trong  $AD$  của góc  $A$

- A.  $\frac{2\sqrt{74}}{3}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{74}}{2}$ .                      C.  $2\sqrt{74}$ .                      D.  $3\sqrt{74}$ .

**Hướng dẫn giải**

$D(x; y; z)$  là chân đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .

$$\text{Ta có } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB} \Rightarrow D\left(\frac{17}{3}; \frac{11}{3}; -1\right) \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{74}}{3}.$$

**Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho 4 điểm  $A(2; 4; -1)$ ,  $B(1; 4; -1)$ ,  $C(2; 4; 3)$ ,  $D(2; 2; -1)$ . Biết  $M(x; y; z)$ , để  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$  đạt giá trị nhỏ nhất thì  $x + y + z$  bằng

- A. 7.                                      B. 8.                                      C. 9.                                      D. 6.

**Hướng dẫn giải**

Gọi  $G$  là trọng tâm của  $ABCD$  ta có:  $G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } M \equiv G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = 7. \end{aligned}$$

**Câu 10.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; 3; 1)$ ,  $B(-1; 2; 0)$ ,  $C(1; 1; -2)$ .  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ , khi đó, độ dài đoạn  $OH$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{870}}{15}$ .                                      B.  $\frac{\sqrt{870}}{14}$ .                                      C.  $\frac{\sqrt{870}}{16}$ .                                      D.  $\frac{\sqrt{870}}{12}$ .

**Hướng dẫn giải**

$H(x; y; z)$  là trực tâm của  $\Delta ABC \Leftrightarrow BH \perp AC, CH \perp AB, H \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{15}; y = \frac{29}{15}; z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{870}}{15}.$$

**Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(3; 1; 0)$ ,  $B$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$  và có hoành độ dương,  $C$  nằm trên trục  $Oz$  và  $H(2; 1; 1)$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Tọa độ các điểm  $B, C$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

- A.  $B\left(\frac{-3 + \sqrt{177}}{4}; \frac{17 - \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 - \sqrt{177}}{4}\right)$ .  
B.  $B\left(\frac{-3 - \sqrt{177}}{4}; \frac{17 + \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 + \sqrt{177}}{4}\right)$ .  
C.  $B\left(\frac{-3 + \sqrt{177}}{4}; \frac{17 - \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 + \sqrt{177}}{4}\right)$ .  
D.  $B\left(\frac{-3 + \sqrt{177}}{4}; \frac{17 + \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 - \sqrt{177}}{4}\right)$ .

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  $B(x; y; 0) \in (Oxy), C(0; 0; z) \in Oz$ .

$$H \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{CH} \perp \overline{AB} \\ \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AH} \text{ cùng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{CH} \cdot \overline{AB} = 0 \\ [\overline{AB}, \overline{AH}] \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y-7=0 \\ 3x-3y+yz-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3-\sqrt{177}}{4}; y = \frac{17+\sqrt{177}}{2}; z = \frac{3+\sqrt{177}}{4}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{4}; \frac{17+\sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3+\sqrt{177}}{4}\right).$$

**Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình vuông  $ABCD$ ,  $B(3; 0; 8)$ ,  $D(-5; -4; 0)$ . Biết đỉnh  $A$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  và có tọa độ là những số nguyên, khi đó  $|\overline{CA} + \overline{CB}|$  bằng:

- A.  $6\sqrt{10}$ .                      B.  $5\sqrt{10}$ .                      C.  $10\sqrt{6}$ .                      D.  $10\sqrt{5}$ .

**Hướng dẫn giải**

Ta có trung điểm  $BD$  là  $I(-1; -2; 4)$ ,  $BD = 12$  và điểm  $A$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  nên  $A(a; b; 0)$ .

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AD^2 \\ AI^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + b^2 + 8^2 = (a+5)^2 + (b+4)^2 \\ (a+1)^2 + (b+2)^2 + 4^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 2a \\ (a+1)^2 + (6-2a)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{17}{5} \\ b = \frac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow A(1; 2; 0) \text{ hoặc } A\left(\frac{17}{5}; \frac{-14}{5}; 0\right)$$

(loại). Với  $A(1; 2; 0) \Rightarrow C(-3; -6; 8)$ .

**Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(5; 3; -1)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(3; 1; -2)$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  bằng:

- A.  $9 - 3\sqrt{6}$ .                      B.  $9 - 2\sqrt{6}$ .                      C.  $9 + 3\sqrt{6}$ .                      D.  $9 + 2\sqrt{6}$ .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  $AC^2 + BC^2 = 9 + 9 = AB^2 \Rightarrow$  tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

$$\text{Suy ra: } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}CA \cdot CB}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 9 - 3\sqrt{6}$$

- Câu 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$ . Biết  $MN = \sqrt{13}, \widehat{MON} = 60^\circ$ , thể tích tứ diện  $OMNP$  bằng 3. Giá trị của biểu thức  $A = m + 2n^2 + p^2$  bằng
- A. 29.                      B. 27.                      C. 28.                      D. 30.

**Hướng dẫn giải**

$$\overline{OM}(3;0;0), \overline{ON}(m;n;0) \Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{ON} = 3m$$

$$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = |\overline{OM}| \cdot |\overline{ON}| \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{\overline{OM} \cdot \overline{ON}}{|\overline{OM}| \cdot |\overline{ON}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$MN = \sqrt{(m-3)^2 + n^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Suy ra } m = 2; n = \pm 2\sqrt{3}$$

$$[\overline{OM}, \overline{ON}] \cdot \overline{OP} = 6\sqrt{3}p \Rightarrow V = \frac{1}{6} |6\sqrt{3}p| = 3 \Rightarrow p = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } A = 2 + 2 \cdot 12 + 3 = 29.$$

- Câu 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2;3;1), B(-1;2;0), C(1;1;-2)$ . Gọi  $I(a;b;c)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 15a + 30b + 75c$
- A. 50.                      B. 48.                      C. 52.                      D. 46.

**Hướng dẫn giải**

$$I(x; y; z) \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \Leftrightarrow AI = BI = CI, I \in (ABC)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ CI^2 = BI^2 \\ [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x = \frac{14}{15}; y = \frac{61}{30}; z = -\frac{1}{3} \Rightarrow I\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow P = 50. \right.$$