

Vì $\overrightarrow{AB}(-5; 1; -3)$, $\overrightarrow{AC}(-4; 1; -4)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -8; -1)$, do đó

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{\sqrt{66}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{66}}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Chiều cao của khối chóp là $SM = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = 2\sqrt{66}$.

Vì $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \perp \overrightarrow{AB}$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \perp \overrightarrow{AC}$ nên giá của véc tơ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, mà $SM \perp (ABCD)$ nên tồn tại số thực k sao cho:

$$\overrightarrow{SM} = k \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-k; -8k; -k).$$

Suy ra $2\sqrt{66} = |\overrightarrow{SM}| = \sqrt{(-k)^2 + (-8k)^2 + (-k)^2} \Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = \pm 2$.

M là trung điểm CD nên $M(5; -1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{SM}(5 - x_S; -1 - y_S; 1 - z_S)$.

• Nếu $k = 2$ thì $\overrightarrow{SM} = (5 - x_S; -1 - y_S; 1 - z_S) = (-2; -16; -2)$ nên tọa độ của điểm S là $S(7; 15; 3)$.

• Nếu $k = -2$ thì $\overrightarrow{SM} = (5 - x_S; -1 - y_S; 1 - z_S) = (2; 16; 2)$ nên tọa độ của điểm S là $S(3; -17; -1)$.

Vậy tọa độ các điểm S cần tìm là $S(7; 15; 3)$ hoặc $S(3; -17; -1)$.

Ví dụ 7.1.6 Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(2; -1; 3)$, $B(3; 0; -2)$, $C(5; -1; -6)$

1. Tính $\cos BAC$, suy ra số đo của BAC ;

2. Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên BC và tọa độ điểm A' đối xứng của A qua đường thẳng BC.

Lời giải.

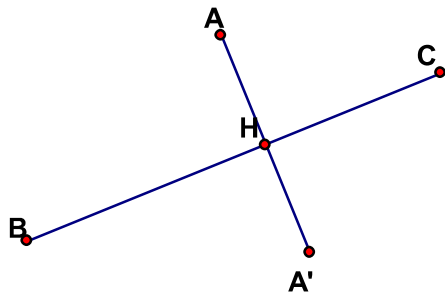
1. Tính $\cos BAC$ và số đo của BAC

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 0; -9)$, suy ra

$$\begin{aligned} \cos BAC &= \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{3 + 45}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-9)^2}} = \frac{48}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{90}} = \frac{16}{3\sqrt{30}} \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{BAC} \approx 13^{\circ}10'$

2. Tọa độ hình chiếu vuông góc H của A lên đường thẳng BC.



Kí hiệu $(x; y; z)$ là tọa độ của H, ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AH} = (x-2; y+1; z-3), \overrightarrow{BC} = (2; -1; -4)$$

$$\overrightarrow{BH} = (x-3; y; z+2)$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) - (y+1) - 4(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 4z + 7 = 0.$$

$$\overrightarrow{BH} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 2x - y - 4z = -7 \\ x + 2y = 3 \\ 4y - z = 2 \end{cases} \text{ ta được } H(1; 1; 2).$$

Tọa độ A' đối xứng của A qua BC.

A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC $\Leftrightarrow H$ là trung điểm của AA'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \\ z_H = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 1 \end{cases} \text{ Vậy } A'(0; 3; 1)$$

Ví dụ 8.1.6 Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(4; 2; 0)$, $B(2; 4; 0)$ và $C(2; 2; 1)$. Xác định tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Lời giải.

Tọa độ trực tâm của tam giác ABC

Gọi $H(x; y; z)$ là trực tâm của tam giác ABC, ta có

$$\begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{BH} \perp \overline{AC} \\ \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AH} \text{ ñoàng phẳng} \end{cases}$$

Trong đó $\overline{AH} = (x-4; y-2; z)$, $\overline{BC} = (0; -2; 1)$

, $\overline{BH} = (x-2; y-4; z)$, $\overline{AC} = (-2; 0; 1)$.

$$* \overline{AH} \perp \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow -2(y-2) + z = 0 \Leftrightarrow 2y - z = 4$$

$$* \overline{BH} \perp \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow -2(x-2) + z = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 4.$$

$$* \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AH} \text{ ñoàng phẳng} \Leftrightarrow [\overline{BC}, \overline{AC}] \cdot \overline{AH} = 0 \text{ (trong đó}$$

$$[\overline{BC}, \overline{AC}] = (-2; -2; -4) \Leftrightarrow -2(x-4) - 2(y-2) - 4z = 0 \\ \Leftrightarrow x + y + 2z = 6$$

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} 2y - z = 4 \\ 2x - z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}, \text{ ta ñược } H\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Toạ ñộ tâm ñường tròn ngoạ tiếp tam giác ABC

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm ñường tròn ngoạ tiếp tam giác ABC, ta có

$$\begin{cases} AI = BI = CI \\ \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AI} \text{ ñoàng phẳng} \end{cases}$$

$$* AI = BI = CI \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 + z^2 \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 4x - 2z = 11 \end{cases}$$

$$* \overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AI} \text{ ñoàng phẳng} \Leftrightarrow [\overline{BC}, \overline{AC}] \cdot \overline{AI} = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z = 6$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x - y = 0 \\ 4x - 2z = 11 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}, \text{ ta ñược } I\left(\frac{23}{8}; \frac{23}{8}; \frac{1}{4}\right).$$