(4): Hình 4 là hình biểu diễn tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{BAC} = 120^0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác.

Các mệnh đề đúng là:

A. $(1),(4)$. B. $(2),(3)$. C. (1). D. $(3),(4)$.

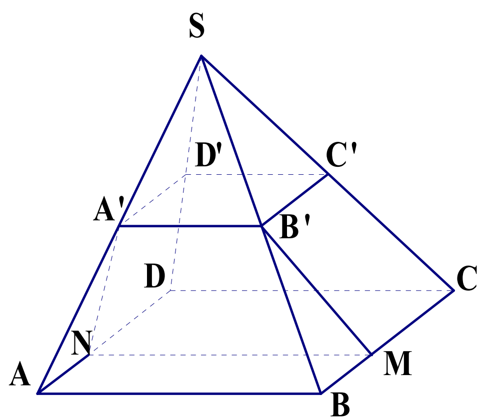
Hướng dẫn giải

Mệnh đề (1) đúng vì tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp O nằm trên các trung tuyến AE, BF. Mệnh đề (2) sai vì trong hình 2 không bảo toàn tính thẳng hàng của A, O, E. Mệnh đề (3) sai vì tam giác ABC vuông thì O trùng trung điểm E của BC nên trong hình biểu diễn cũng phải bảo toàn tính chất này. Mệnh đề (4) đúng vì hình 4 bảo toàn tính thẳng hàng của A, O và trung điểm E của BC và thứ tự giữa các điểm này (tam giác ABC tù tại đỉnh A nên O nằm ngoài đoạn AE)

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Gọi M là điểm bất kì trên BC. Thiết diện của $mp(A'B'M)$ với hình chóp $S.ABCD$ là:

A. Hình thang. B. Hình bình hành. C. Hình thoi. D. Hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải



Chứng minh $A'B'C'D'$ *là hình bình hành* :

Trong tam giác SAB, ta có : $A'B'//AB, A'B'=\frac{1}{2}AB$

Trong tam giác SCD, ta có : $C'D'//CD; C'D'=\frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow A'B'//C'D'$.

Vậy : Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Tìm thiết diện của $(A'B'M)$ *với hình chóp* $S.ABCD$:

Ta có : $A'B'//AB$ và M là điểm chung của $(A'B'M)$ và $(ABCD)$

Do đó giao tuyến của $(A'B'M)$ và $(ABCD)$ là Mx song song AB và $A'B'$.

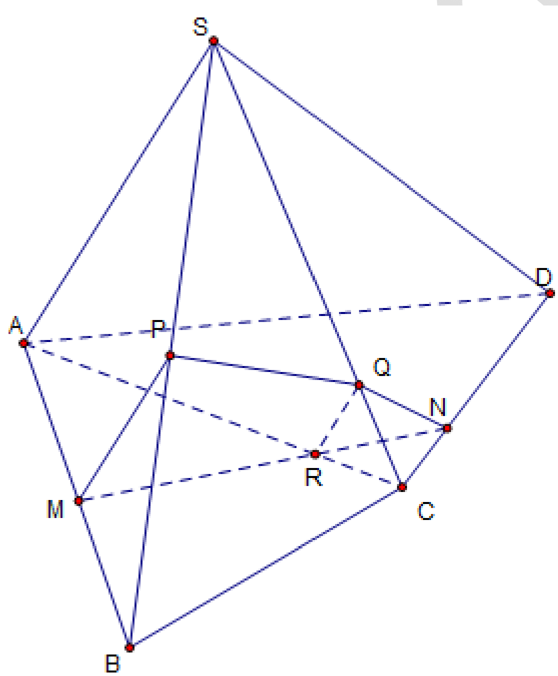
Gọi $N = Mx \cap AD$. Vậy : Thiết diện là hình thang $A'B'MN$. Do đó chọn đáp án A.

Câu 38. Cho hình chóp $SABCD$ với M,N lần lượt là hai điểm lấy trên các cạnh AB,CD. Gọi (α) là

mặt phẳng qua MN và song song với SA. Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng

(α) là:

A. Tứ giác. B. Tam giác. C. Ngũ giác. D. Hình thang.



+ Mặt phẳng (α) song song với SA mà $SA \subset (SAB), M \in (\alpha) \cap (SAB)$. Ta biết một điểm chung M của mặt phẳng (α) và (SAB) đồng thời biết phương của giao tuyến là phương song song với SA. Vậy $(\alpha) \cap (SAB) = MP$ với $MP \parallel SA$, P thuộc SB.

+ Tương tự gọi $R = AC \cap MN$ là một điểm chung của (α) và (SAC) đồng thời (α) song song với SA mà $SA \in (SAC)$ nên ta có $(\alpha) \cap (SAC) = RQ$, $RQ \parallel SA, Q \in SC$. Nên đoạn giao tuyến (α) và (SCD) là đoạn QN

+ Đoạn giao tuyến của (α) và (SBC) là PQ.

Vậy thiết diện tứ giác MNQP.

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ΔABC. Hình chiếu song song K của G

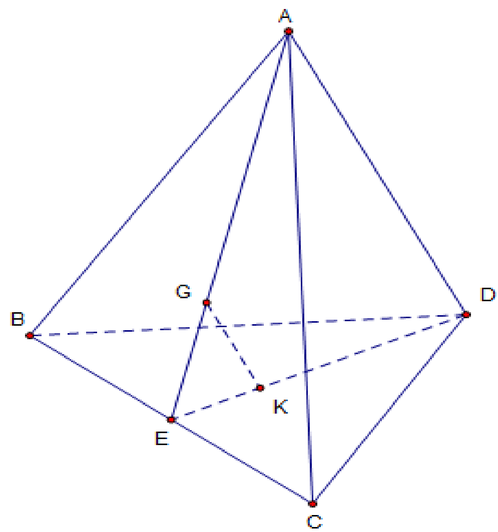
trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là:

A. Trọng tâm tam giác ΔBCD

B. Trực tâm tam giác ΔBCD

C. Là điểm bất kì trong tam giác ΔBCD

D. Là điểm H sao cho $\mathrm{GH} \perp (\mathrm{BCD})$



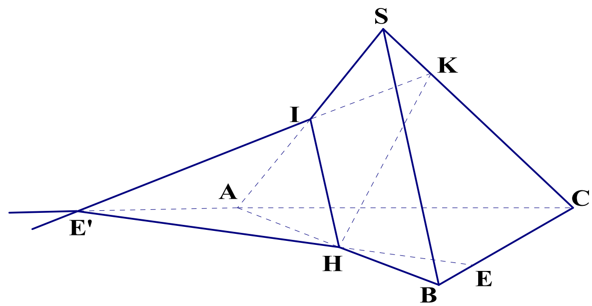
+ Từ giả thiết ta có: $GK//AD, AG \cap DK = E$ với E là trung điểm của BC. Từ đó ta có: $\frac{EK}{KD} = \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow K$ là trọng tâm tam giác ΔBCD

Câu 40. Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng nằm trong cùng một mặt phẳng . Gọi I, H lần lượt là trung

điểm của SA, AB .Trên SC lấy điểm K sao cho: $CK = 3KS$ .Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $KE//SB$ B. KI cắt AB C. $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}$ D. $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải



Cách 1. (dựng điểm E, chỉ sử dụng kiến thức bài đại cương đường thẳng và mặt phẳng)

Chọn mp phụ $(ABC) \supset BC$

Tìm giao tuyến của (ABC) và (IHK)

Trong (SAC) ,có IK không song song với AC. Gọi $E' = IK \cap AC \Rightarrow (ABC) \cap (IHK) = HE'$

Trong (ABC), gọi $E_1 = BC \cap HE'$

$E_1 \in BC, BC \subset (ABC) \Rightarrow E_1 \in (ABC)$

$E_1 \in HE', HE' \subset (IHK) \Rightarrow E_1 \in (IHK)$

Suy ra: $E_1 = BC \cap (IHK) \Rightarrow E \equiv E_1$

Sau khi dựng xong điểm E, ta sẽ quan sát thấy $KE // SB$ (hoặc quan sát kĩ hình hơn sẽ thấy “vai trò" điểm E trong tam giác ABC cũng giống như điểm K trong tam giác SAC, do đó tỉ lệ của

điểm E chia đoạn BC cũng giống như tỉ lệ điểm K chia đoạn SC. Do vậy, áp dụng định lí Ta-let

cho tam giác SBC ta có $KE//SB$). Vậy chọn đáp án A.

Cách 2. (Sử dụng tính chất quan hệ song song của đường thẳng và mặt phẳng)

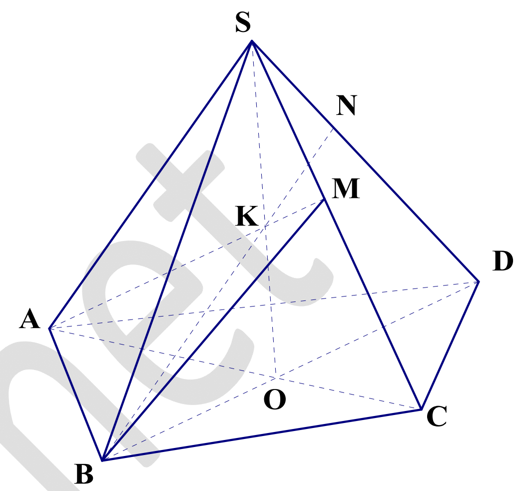
Ta có: IH là đường trung bình trong tam giác SAB nên song song với SB. Do đó hai mặt phẳng (SBC) và (IHK) lần lượt chứa hai đường thẳng SB, IH song song với nhau sẽ cắt nhau theo giao tuyến KE song song với SB. Vậy chọn đáp án A.

VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một

điểm M không trùng với S và C .Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng

(ABM). Khi đó AN:



A. $AN = (ABM) \cap (SAD)$

B. $AN = (ABM) \cap (SBC)$

C. $AN = (ABM) \cap (SCD)$

D. $AN = (ABM) \cap (SAC)$

Hướng dẫn giải

Ta có

$B \in (ABM) \cap (SBD) \quad (1)$

Gọi $O = AC \cap BD, K = AM \cap SO$. Khi đó:

$$\begin{cases} K \in AM \subset (ABM) \\ K \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABM) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(ABM) \cap (SBD) = BK$

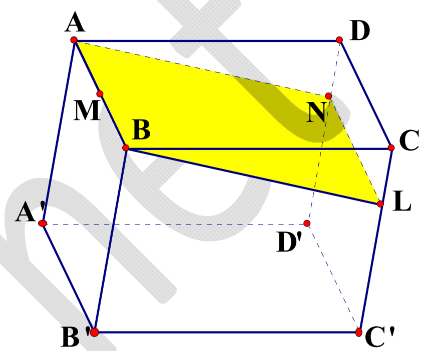
Trong mặt phẳng (SBD). Gọi $N = BK \cap SD$. Khi đó:

$$\begin{cases} N \in SD \\ N \in BK \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow N = (ABM) \cap SD$$. Dễ thấy $AN = (ABM) \cap (SAD)$

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M,N lần lượt thuộc các cạnh AB,DD' .(M,N

không trùng với các đầu mút của các cạnh). Thiết diện của hình hộp bị cắt bởi mặt phẳng

(MNB) là:



A.Hình bình hành;

B.Hình chữ nhật;

C.Hình thoi;

D.Hình thang cân;

Hướng dẫn giải

Ta có :

$(MNB)\cap(\mathrm{AA}'B'B)=MB$
$(MNB)\cap(\mathrm{AA}'D'D)=AN$
$(MNB)\cap(\mathrm{DD}'C'C)=NL$

Trong đó $L=x\cap CC', L\in x//CD$, x đi qua N

Mà: $(MNB)\cap(BB'C'C)=LB \Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $ABLN$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} LN//DC, LN = DC \\ DC//AB, DC = AB \end{cases} \Rightarrow LN//AB, LN = AB\ \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là hình bình hành

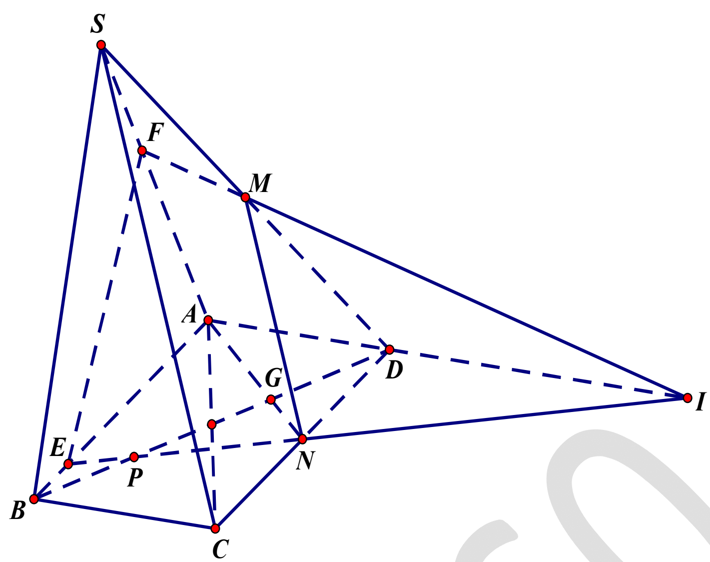
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M, N lần lượt là trung điểm của

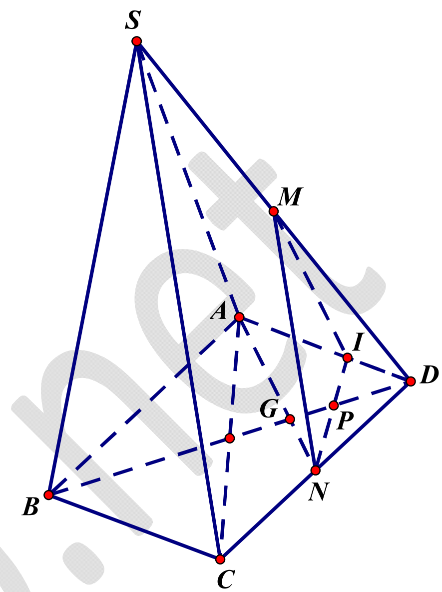
SD, DC. Điểm P thay đổi trên cạnh BD, $\frac{BP}{BD} = k$. Giá trị k để thiết diện của

$mp(MNP)$ và hình chóp là tứ giác.

A. $0 \le k < \frac{2}{3}$ B. $0 \le k \le \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{4}$ D. $0 \le k < \frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải





Gọi G là giao điểm của AN và BD. Trong $mp(ABCD)$, khi P thay đổi trên đoạn BG $\left(P \neq G\right)$, đường thẳng NP luôn cắt đoạn AB tại một điểm E (E thay đổi từ trên AB, $E \neq A$), đường thẳng EN cắt đường thẳng AD tại I. Trong $mp(\text{SAD})$, đường thẳng IM cắt SA tại F. Thiết diện là tứ giác $MNEF$.

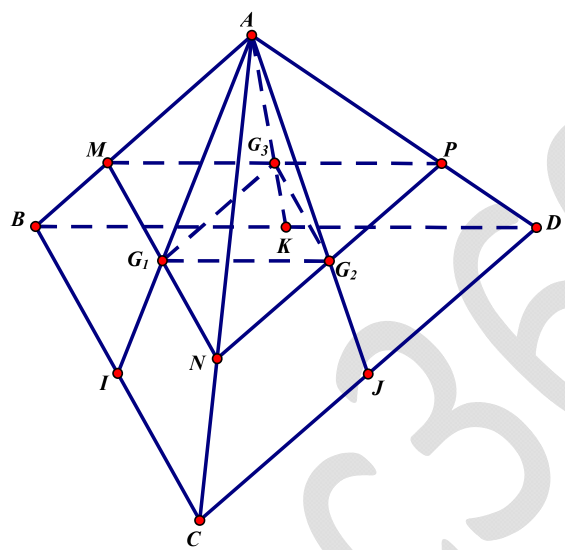
Khi P chạy từ G đến D, đường thẳng NP cắt đoạn AD tại I. Thiết diện là tam giác MNI.

Vậy đáp án là $0 \leq k < \dfrac{2}{3}$

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB. Diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng $\left(G_1G_2G_3\right)$ bằng k lần diện tích tam giác BCD, khi đó k bằng:

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải



Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm BC,CD,DB. Ta có: $\frac{AG_1}{AI}=\frac{AG_2}{\text{AJ}}=\frac{AG_3}{AK}=\frac{2}{3}$ nên $G_1G_2//\text{IJ}$, $G_1G_3//IK$. Suy ra $\left(G_1G_2G_3\right)//(BCD)$. Do vậy, giao tuyến của $\left(G_1G_2G_3\right)$ và (ABC) là đường thẳng qua G_1 song song với BC, đường thẳng này cắt AB,AC lần lượt tại M,N $MG_3\cap AD=P$. Thiết diện là tam giác MNP. Tam giác MNP có các cạnh tương ứng song

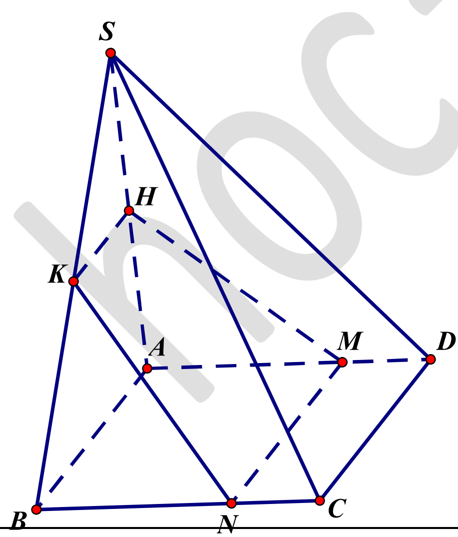
song với các cạnh của tam giác BCD và $\frac{MN}{BC}=\frac{NP}{CD}=\frac{PM}{BD}=\frac{2}{3}$ nên diện tích tam giác MNP bằng $\frac{4}{9}$ lần diện tích tam giác BCD hay $k=\frac{4}{9}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của SA,SB. M là một điểm trên cạnh AD ,

mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N. Đặt $AM=x$ $(0\le x\le a)$. Giá trị x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $x=0$ B. $x=\frac{a}{2}$ C. $x=\frac{3a}{4}$ D. $x=a$

Hướng dẫn giải



Mặt phẳng (HKM) và $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng song song HK và AB nên giao tuyến của chúng là MN cũng song song với HK và AB. Xét hai tam giác HAM và KBN có:

$BN = AM$; $BK = AH$; $\widehat{KBN} = \widehat{MAH}$ (do $\triangle SBC = \triangle SAD$) nên $\triangle HAM = \triangle KBN$.

Từ đó suy ra: $MH = KN$. $MHKN$ là hình thang cân có hai đáy $MN = a; HK = \frac{a}{2}$.

Sử dụng định lý hàm số $\cos$ cho tam giác SAD ta tính được $\cos\widehat{HAD} = -\frac{1}{2}$. Ta tính được:

$$HM^2 = HA^2 + AM^2 - 2HA.AM.\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 + 4x^2 + 2ax}{4}.$$

Đường cao của hình thang cân được tính bằng công thức:

$\sqrt{HM^2 - (\frac{MN - HK}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}$. Do hai đáy có độ dài không đổi nên diện tích thiết diện bé nhất khi đường cao bé nhất đạt khi x=0

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. PQ cắt $mp(SBC)$

C. $mp(MOR)//mp(SCD)$

B. $mp(MON)//mp(SBC)$

D. $PQ//mp(SBC)$

Hướng dẫn giải