Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}<1$ là con của tập nào sau đây?

A. $-1\le x\le 1$ B. $(-8;0)$ C. $(1;9)$ D. $(0;1]$

Hướng dẫn giải

$2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}<1 \quad (1)$. Điều kiện: $x\ge 0$

$(1)\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{2^{\sqrt{x}}}<1 \quad (2)$. Đặt $t=2^{\sqrt{x}}$. Do $x\ge 0\Rightarrow t\ge 1$

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1 \\ t-\dfrac{2}{t}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1 \\ t^2-t-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le t<2 \Leftrightarrow 1\le 2^{\sqrt{x}}<2 \Leftrightarrow 0\le x<1$$

Chủ đề 3.4 - PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

VẬN DỤNG

Câu 35. Nghiệm của phương trình $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$ là:

A. $x\in\{-5;-1;1;2\}$ B. $x\in\{-5;-1;1;3\}$ C. $x\in\{-5;-1;1;-2\}$ D. $x\in\{5;-1;1;2\}$

Hướng dẫn giải

$$4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1 \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{x^2-3x+2}.4^{x^2+6x+5}+1$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)-\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)=0 \Leftrightarrow \left(4^{x^2-3x+2}-1\right)\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x^2-3x+2}-1=0 \\ 1-4^{x^2+6x+5}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ x^2+6x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\vee x=-5 \\ x=1\vee x=2 \end{array}\right.$$

Câu 36. Phương trình $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x=1$$

Xét hàm số $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x+\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x$

Ta có: $f(2)=1$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}<1;\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}<1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=2$

Câu 37. Phương trình $3^{2x}+2x\left(3^x+1\right)-4.3^x-5=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm.

A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Hướng dẫn giải

$3^{2x}+2x\left(3^x+1\right)-4.3^x-5=0 \Leftrightarrow \left(3^{2x}-1\right)+2x\left(3^x+1\right)-\left(4.3^x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3^x-1\right)\left(3^x+1\right)+(2x-4)\left(3^x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(3^x+2x-5\right)\left(3^x+1\right)=0 \Leftrightarrow 3^x+2x-5=0$

Xét hàm số $f(x)=3^x+2x-5$, ta có : $f(1)=0$

$f'(x)=3^x\ln 3+2>0;\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x=1$

Câu 38. Phương trình $2^{x-3}=3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1,x_2 trong đó $x_1<x_2$, chọn phát biểu đúng?

A. $3x_1-2x_2=\log_3 54$ B. $2x_1-3x_2=\log_3 54$

C. $2x_1+3x_2=\log_3 54$ D. $3x_1+2x_2=\log_3 54$

Hướng dẫn giải

Lấy logarit cơ số 2 hai vế (hoặc có thể lấy $\log_3$ hai vế), ta được:
$(3)\Leftrightarrow \log_2 2^{x-3}=\log_3 3^{x^2-5x+6}$

$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 2=\left(x^2-5x+6\right)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-3)-(x-2)(x-3)\log_2 3=0$

$\Leftrightarrow (x-3).\left[1-(x-2)\log_2 3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=0\\1-(x-2)\log_2 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\(x-2)\log_2 3=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x-2=\dfrac{1}{\log_2 3}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 2+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 2+\log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 18 \end{array}\right.$$

Câu 39. Cho phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Phương trình có một nghiệm vô tỉ
B. Phương trình có một nghiệm hữu tỉ

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu
D. Tích của hai nghiệm bằng -6

Hướng dẫn giải

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6 \qquad (8)$$

$$(8)\Leftrightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2\right]^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-6=0 \Leftrightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^x\right]^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-6=0 \quad (8')$$

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x>0$.

Khi đó: $(8')\Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=2 & (N) \\ t=-3 & (L) \end{array}\right.$. Với

$t=2\Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x=2 \Leftrightarrow \boxed{x=\log_{\left(2+\sqrt{3}\right)} 2}$

Chọn đáp án A

Câu 40. Phương trình $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3$ có tổng các nghiệm là :

A. 0
B. 2
C. 3
D. 4

Hướng dẫn giải

$$3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3 \qquad (7)$$

$$(7)\Leftrightarrow 27.3^{3x}+\frac{27}{3^{3x}}+81.3^x+\frac{81}{3^x}=10^3 \Leftrightarrow 27.\left(3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}\right)+81.\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)=10^3 \quad (7')$$

Đặt $t=3^x+\frac{1}{3^x}\overset{Côsi}{\geq} 2\sqrt{3^x.\frac{1}{3^x}}=2$

$$\Rightarrow t^3=\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)^3=3^{3x}+3.3^{2x}.\frac{1}{3^x}+3.3^x.\frac{1}{3^{2x}}+\frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}=t^3-3t$$

Khi đó: $(7') \Leftrightarrow 27(t^3-3t)+81t=10^3 \Leftrightarrow t^3=\frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t=\frac{10}{3}>2\ \ (N)$

Với $t=\frac{10}{3} \Rightarrow 3^x+\frac{1}{3^x}=\frac{10}{3}\quad (7'')$

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó: $(7'') \Leftrightarrow y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3\ \ (N) \\ y=\frac{1}{3}\ \ (N) \end{array}\right.$

Với $y=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Với $y=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

Câu 41. Phương trình $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=6$ có họ nghiệm là :

A. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$

B. $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$

C. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$

D. $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$

Hướng dẫn giải

$9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=6 \Leftrightarrow 9^{1-\cos^2 x}+9^{\cos^2 x}=6 \Leftrightarrow \frac{9}{9^{\cos^2 x}}+9^{\cos^2 x}-6=0\quad (*)$

Đặt $t=9^{\cos^2 x},\ (1\le t\le 9)$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \frac{9}{t}+t-6=0 \Leftrightarrow t^2-6t+9=0 \Leftrightarrow t=3$

Với

$t=3 \Rightarrow 9^{\cos^2 x}=3 \Leftrightarrow 3^{2\cos^2 x}=3^1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}},\ (k\in\mathbb{Z})$

Câu 42. Với giá trị nào của m thì phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=m$ vô nghiệm?

A. $m<2$ B. $m>2$ C. $m=2$ D. $m\le 2$

Câu 43. Với giá trị nào của m thì phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=m$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m>2$ B. $m<2$ C. $m=2$ D. $m\le 2$

Hướng dẫn giải câu 25 & 26

Nhận xét: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$.

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=\dfrac{1}{t}, \forall t\in(0,+\infty)$.

$(1) \Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}=m \Leftrightarrow f(t)=t+\dfrac{1}{t}=m \quad (1'), \forall t\in(0,+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{1}{t}$ xác định và liên tục trên $(0,+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$. Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	0 $+\infty$		1	
$f'(t)$			$-$	0	$+$
$f(t)$		$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên:

+ Nếu $m<2$ thì phương trình $(1')$ vô nghiệm $\Rightarrow pt(1)$ vô nghiệm.

Bài 25 chọn đáp án A

+ Nếu $m=2$ thì phương trình $(1')$ có đúng một nghiệm $t=1 \Rightarrow pt(1)$ có đúng một nghiệm $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1 \Rightarrow x=0$.