(ĐH khối D 2006) Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

LỜI GIẢI

Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là: $C_{12}^{4} = 495$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

• Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp 1 học sinh. $\Rightarrow$ Số cách chọn là: $C_5^2C_4^1C_3^1 = 120$

• Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp 1 học sinh: $\Rightarrow$ Số cách chọn là: $C_5^1C_4^2C_3^1 = 90$

• Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp 1 học sinh: $\Rightarrow$ Số cách chọn là: $C_5^1C_4^1C_3^2 = 60$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là:120 + 90 + 60 = 270

Vậy số cách chọn phải tìm là: 495 – 270 = 225 cách.

Từ một nhóm 12 học sinh gồm 4 học sinh khối A, 4 học sinh khối B và 4 học sinh khối C chọn ra 5 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh. Tính số cách chọn.

LỜI GIẢI

+ Trường hợp 1: 1 khối có 3 học sinh và 2 khối còn lại mỗi khối có 1 học sinh.

- Bước 1: chọn 1 khối có 3 học sinh có 3 cách.
- Bước 2: trong khối đã chọn ta chọn 3 học sinh có $C_4^3 = 4$ cách.
- Bước 3: 2 khối còn lại mỗi khối có 4 cách chọn.

Suy ra có 3.4.4.4 = 192 cách.

+ Trường hợp 2: 2 khối có 2 học sinh và khối còn lại có 1 học sinh.

- Bước 1: chọn 2 khối có 2 học sinh có $C_3^2 = 3$ cách.
- Bước 2: trong 2 khối đã chọn ta chọn 2 học sinh có $C_4^2 = 6$ cách.
- Bước 3: khối còn lại có 4 cách chọn.

Suy ra có 3.6.6.4 = 432 cách.

Vậy có 192 + 432 = 624 cách.

Cách khác:

+ Chọn 5 học sinh tùy ý có $C_{12}^5 = 792$ cách.

+ Chọn 5 học sinh khối A và B (tương tự khối A và C, B và C) có $C_8^5 = 56$ cách.

Vậy có 792 – 3.56 = 624 cách.

Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ.

LỜI GIẢI

+ Loại 1: bầu 4 người tùy ý (không phân biệt nam, nữ).

- Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_{12}^2 cách.

- Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_{10}^2 cách.

Suy ra có $A_{12}^2.C_{10}^2$ cách bầu loại 1.

+ Loại 2: bầu 4 người toàn nam.

- Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_7^2 cách.

- Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_5^2 cách.

Suy ra có $A_7^2.C_5^2$ cách bầu loại 2.

Vậy có $A_{12}^2.C_{10}^2 - A_7^2.C_5^2 = 5520$ cách.

Có 16 học sinh gồm 3 học sinh giỏi,5 học sinh khá,8 học sinh trung bình.Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ có 8 học sinh sao cho mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh khá.

LỜI GIẢI

Vì chỉ có 3 học sinh giỏi và hai tổ đều phải có học sinh giỏi nên tổ có ít học sinh nhất phải có đúng 1 học sinh giỏi,gọi tổ có ít học sinh giỏi là tổ A.

Số cách lập tổ A

Bước 1:chọn một học sinh giỏi cho tổ A: có 3 cách.

Bước 2:chọn học sinh khá và trung bình.

TH1:Nếu A có 2 học sinh khá thì phải có 5 học sinh trung bình.Do đó ta có $C_5^2C_8^5$ cách chọn.

TH2:Nếu A có 3 học sinh khá thì phải có 4 học sinh trung bình.Do đó ta có $C_5^3C_8^4$ cách chọn.

Tóm lại ta có tất cả: $3(C_5^2C_8^5 + C_5^3C_8^4) = 3(10.56 + 10.70) = 3780$ cách.

Số cách chọn tổ A cũng chính là cách chia 6 học sinh ra làm 2 tổ theo yêu cầu bài toán.

Có 4 người. Mỹ, 4 người Pháp, 4 người Anh, 4 người Nhật. Cần chọn 6 người đi hôi nghị. Hỏi có mấy cách chọn sao cho.

a).Mỗi nước đều có đại biểu?

b). Không có nước nào có hơn 2 đại biểu.

LỜI GIẢI

a).Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Một nước có 3 đại biểu và các nước kia mỗi nước có đại biểu.

Chọn 1 trong 4 nước, được cử 3 đại biểu có C_4^1 cách, rồi chọn 3 người trong 4 người của nước đó là $C_4^3 = 4$ cách. Ba nước còn lại mỗi nước có C_4^1 cách chọn 1 đại biểu.

Vậy ta có $C_4^1.C_4^3.C_4^1.C_4^1C_4^1 = 4^5 = 1024$ cách.

Trường hợp 2: Hai nước mỗi nước 2 đại biểu và 2 nước kia mỗi nước 1 đại biểu.

Bước 1: Chọn 2 nước trong 4 nước có 2 đại biểu là C_4^2 cách.

Bước 2: Chọn 2 trong 4 người mỗi nước đó ta có $C_4^2 = 6$

Bước 3: Hai nước còn lại, mỗi nước chọn 1 người trong 4 người ta có C_4^1 cách.

Theo quy tắc nhân có $C_4^2.C_4^2.C_4^2.C_4^1.C_4^1 = 3456$ cách.

Kết luận theo quy tắc cộng ta có $1024 + 3456 = 4480$ cách chọn.

b).Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1: 3 nước, mỗi nước 2 đại biểu:

Chọn 3 trong 4 nước để mỗi nước chọn 2 đại biểu có $C_4^3 = 4$ cách.Chọn 2 trong 4 người của mỗi nước đó có $C_4^2 = 6$ cách.ba nước có 6^3 cách.

Vậy ta có 4.6^3 cách.

Trường hợp 2: Có 2 nước, mỗi nước có 2 đại biểu và 2 nước kia mỗi nước có 1 đại biểu.

(đã có ở câu a, ta có $6^3.4^2$ cách)

Theo quy tắc cộng ta có $4.6^3 + 6^3.4^2 = 4320$ cách.

Cho tập A có 20 phần tử. a. Có bao nhiêu tập con của tập hợp A ? b. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của tập hợp A mà có số phần tử là chẵn ?

LỜI GIẢI

a . $*$ Có C_{20}^0 tập con không có phần tử ;

$*$ Có C_{20}^1 tập con có 1 phần tử ;

$*$ Có C_{20}^2 tập con có 2 phần tử ;

$*$ Có C_{20}^3 tập con có 3 phần tử ;

…………….

$*$ Có C_{20}^{20} tập con có 20 phần tử.

Vậy có tất cả $C_{20}^0 + C_{20}^1 + ... + C_{20}^{20} = 2^{20}$ tập con của A.

b. $*$ Có C_{20}^2 tập con có 2 phần tử ;

$*$ Có C_{20}^4 tập con có 4 phần tử ;

$*$ Có C_{20}^6 tập con có 6 phần tử ;

……………

∗ Có C_{20}^{20} tập con có 20 phần tử .

Vậy có tất cả $C_{20}^{2}+C_{20}^{4}+...+C_{20}^{20}=2^{19}-1$ tập con của A.

Thật vậy, ta có : $C_{20}^{0}+C_{20}^{1}x+C_{20}^{2}x^{2}+...+C_{20}^{19}x^{19}+C_{20}^{20}x^{20}=(1+x)^{20}$.

Cho $x=\pm1$ ta có : $C_{20}^{0}+C_{20}^{1}+C_{20}^{2}+...+C_{20}^{19}+C_{20}^{20}=2^{20}$

Và $C_{20}^{0}-C_{20}^{1}+C_{20}^{2}-...-C_{20}^{19}+C_{20}^{20}=0 \Rightarrow 2\left[C_{20}^{0}+C_{20}^{2}+...+C_{20}^{18}+C_{20}^{20}\right]=2^{20}$

$\Rightarrow C_{20}^{2}+C_{20}^{4}+...+C_{20}^{20}=\dfrac{2^{20}-2}{2}=2^{19}-1$.

Một bộ bài tú lơ khơ có 52 quân bài , mỗi loại cơ , rô, chuồn, bích có 13 quân. Cần lấy từ bộ bài ra 8 quân trong đó có 1 cơ, 3 rô, không có quá 2 bích. Hỏi có bao nhiêu cách lấy.

LỜI GIẢI

Số cách chọn 1 quân cơ trong 13 quân: $C_{13}^{1}=13$ cách.

Số cách chọn 3 quân rô trong 13 quân, có C_{13}^{3} cách.

Ta xét tiếp các trường hợp sau:

TH1: Không có quân bích nào, tức là 4 chuồn:có C_{13}^{4} cách. Do đó số cách chọn $13C_{13}^{3}.C_{13}^{4}$

TH2: Có 1 quân bích, 2 chuồn, có $C_{13}^{1}.C_{13}^{3}$ cách. Do đó số cách chọn $13.C_{13}^{1}C_{13}^{3}C_{13}^{3}$

TH3: Có 2 quân bích, 2 chuồn, có $C_{13}^{2}C_{13}^{2}$ cách. Do đó số cách chọn 13. $C_{13}^{3}C_{13}^{2}C_{13}^{2}$

Theo quy tắc cộng ta có: $13.C_{13}^{3}(C_{13}^{4}+C_{13}^{1}.C_{13}^{3}+C_{13}^{2}.C_{13}^{2})=39102206$ cách.

Xét các biển số xe là dãy gồm hai chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, C, … , Z ; các chữ số được lấy từ 10 chữ số 0, 1, 2, … , 9.
a). Có bao nhiêu biển số xe trong đó ít nhất một chữ cái khác chữ cái O và các chữ số đôi một khác nhau ?
b). Có bao nhiêu biển số xe trong đó có hai chữ cái khác nhau, có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đó giống nhau ?

LỜI GIẢI

a . Có 26^{2} cách xếp hai chữ cái, trong đó có 1 cách xếp mà hai chữ cái đều là chữ O

$\Rightarrow$ có $26^{2}-1$ cách xếp hai chữ cái đứng trước trong đó ít nhất một chữ cái khác O.

Có A_{10}^{4} cách xếp 4 chữ số đôi một khác nhau.

Vậy có tất cả là $(26^{2}-1).A_{10}^{4}=3402000$ biển số xe.

b . Có 26.25 cách xếp 2 chữ cái khác nhau.

Chọn một số lẻ và xếp vào 2 trong 4 vị trí của bốn chữ số có $5.C_{4}^{2}$ cách ;

Xếp 2 số chẵn vào 2 vị trí còn lại có 5^{2} cách.

Vậy tất cả có $26.25.5.C_4^2.5^2 = 487500$ biển số.

53. Cho tập $M = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ và N là tập gồm 26 chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh. Giả sử tại Hà Nội ta cần lập các biển số xe có dạng sau

29 – Xm

a b c d

trong đó $X \in N, m \in M \setminus \{0\}$ và $a, b, c, d \in M$ có thể trùng nhau.

a . Có bao nhiêu biển số xe được tạo thành ?

b . Có bao nhiêu biển số thỏa $a + b + c + d$ là một số có tận cùng là 9 ?

LỜI GIẢI

a . Ta thấy : có 26 cách chọn chữ X ; có 9 cách chọn số m ; có 10^4 cách xếp các số a, b, c, d.

Vậy ta có $26.9.10^4 = 2340000$ biển số xe được tạo thành.

b . Ta có : có 26 cách chọn chữ X ; có 9 cách chọn số m ; có 10^3 cách xếp các số a, b, c; có 1 cách chọn d (nếu $a + b + c$ là số có tận cùng là e thì ta chọn $d = 9 - e$).

Vậy có $26.9.10^3 = 234000$ biển số xe.

Một bảng xe gắn máy ở thành phố X có cấu tạo như sau:

-Phần đầu gồm 2 chữ cái phân biệt viết hoa trong bảng chữ cái.

-Phần sau gồm 4 chữ số trong các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ví dụ: SA0979, EY 3535,...

Hỏi có bao nhiêu cách cấu tạo bảng số xe theo cấu tạo như trên (giả sử bảng chữ cái có tất cả 26 chữ cái).

LỜI GIẢI

Gọi bảng số xe có dạng $\overline{X_1X_2x_3x_4x_5x_6}$, trong đó X_1, X_2 là chữ, còn x_3, x_4, x_5, x_6 là các chữ số.

Bước 1: Có 26 cách chọn chữ cái cho X_1.

Bước 2: Có 25 cách chọn chữ cái cho X_2 (bỏ đi một chữ mà X_1 đã chọn).

Bước 3: Mỗi chữ số x_3, x_4, x_5, x_6 có 10 cách chọn do không có sự phân biệt.

Theo quy tắc nhân có $26.25.10^4 = 6500000$ bảng số xe thỏa yêu cầu.