Vấn đề 3. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP VÀ LĂNG TRỤ.

Phương pháp:

1) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đáy là đa giác nội tiếp.
Để xác định tậm của mặt cầu ngoài tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ ta thường thực hiện các bước sau:

- Xác định tâm I đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_2$.
- Kẻ Ix vuông góc với mặt phẳng $(A_1A_2...A_2)$.
- Xác định mặt phẳng (P) là trung trực một cạnh bên SA_i.
- Tâm O là giao điểm của Ix và (P). Bán kính $R = SO = OA_i$.

Chú ý:

- Trong hình chóp đều thì đường cao của hình chóp là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Trong trường hợp trục đường tròn ngoại tiếp đáy đồng phẳng với một cạnh bên(như hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, hay hình chóp đều,...) thay vì tìm xác định mặt phẳng trung trực ta đi xác định đường thẳng trung trực.
- Trong một số bài toán chỉ yêu cầu xác định bán kính mặt cầu ngoại ta có thể đưa về tìm bán kính của đường tròn lớn.
- Nếu hình chóp là một tứ diện có một mặt là tam giác đặc biệt như tam giác vuông, đều hoặc cân nên chọn tam giác đó làm đáy.
- Nếu xác định đươc đoạn thẳng MN cố định và các đỉnh của hình chóp cùng nhìn đoạn MN dưới một góc vuông thì tâm hình cầu là trung điểm đoạn MN và $R = \frac{MN}{2}$.
- Nếu xác định được điểm O thỏa mãn $OS = OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ thì O chính là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Trong nhiều bài toán thay vì đi xác định bán kính của mặt cầu ta đi xác định bán kính của đường tròn lớn.

2) Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ

- Một lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đó là lăng trụ đứng và đáy là đa giác nội tiếp.

- Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là trung điểm của đoạn nối hai tâm của hai đáy.

3) Vị trị tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

- Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(I,R) \Leftrightarrow d(I,\Delta) = R$
- Đường thẳng Δ cắt mặt cầu $S(I,R)$ tại hai điểm A, B $\Leftrightarrow d(I,\Delta) < R$.

Khi đó gọi H là hình chiếu của I lên AB, ta có H là trung điểm AB và $IH^2 + AH^2 = R^2$

4) Vị trị tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

- Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(I,R) \Leftrightarrow d(I,(P)) = R$, khi đó tiếp điểm H là hình chiếu của tâm I lên mặt phẳng (P).
- Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(I,R) \Leftrightarrow d(I,(P)) < R$, khi đó giao tuyến của chúng là đường tròn có tâm H là hình chiếu I lên (P) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.

5) Mặt cầu nội tiếp hình chóp:

- Là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp
- Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp. Khi đó I cách đều tất cả các mặt của hình chóp.
- Giả sử hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ $(n \ge 3)$ có mặt cầu nội tiếp tâm I bán kính r. Gọi V là thể tích khối chóp và $\sum S$ là diện tích toàn phần của hình chóp. Khi đó

$$V = \frac{1}{3}\sum S.r.$$

<u>**Nhận xét**</u>:

1. Từ công thức trên ta có công thức tính bán kính mặt cầu nội tiếp của một hình

chóp là $r = \dfrac{3V}{\sum S}$. Đối với một số bài toán việc xác tâm mặt cầu ngoại tiếp

rất khó

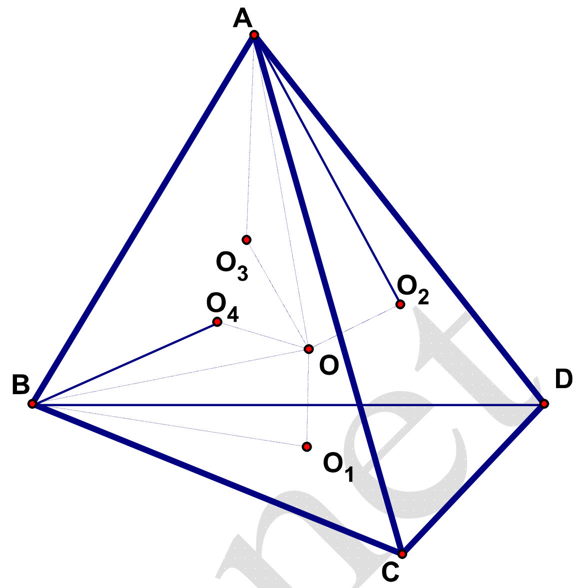
nên ta có thể vận dụng công thức trên để xác định bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

2. Đối với hình chóp đều tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp thuộc đường cao hình chóp.

Ví dụ 1.3.5 Cho tứ diện ABCD có $AB = CD, BC = AD, AC = BD$. Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện ABCD cũng là tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện đó.

Lời giải.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện $ABCD$, ta có $OA = OB = OC = OD$. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (BCD), $(ACD), (ABD), (ABC)$ thì O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác này.
Các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC bằng nhau (c.c.c) nên các bán kính



R_1, R_2, R_3, R_4 của đường tròn ngoại tiếp các tam giác này bằng nhau.
Các tam giác vuông $OO_1B, OO_2A, OO_3A, OO_4B$ cho

$$OO_1^2 = OB^2 - R_1^2, OO_2^2 = OA^2 - R_2^2, OO_3^2 = OA^2 - R_3^2, OO_4^2 = OB^2 - R_4^2$$

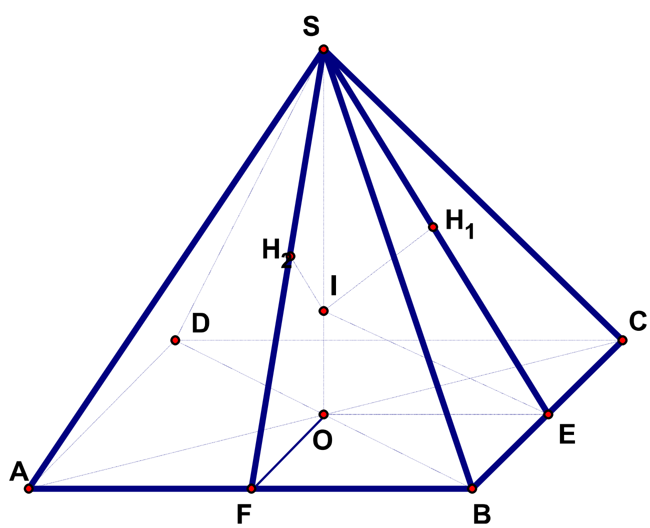
$\Rightarrow OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4$

$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 2.3.5 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = a$ (O là tâm của hình vuông $ABCD$). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB. Trong tam giác vuông SOE, đường phân giác trong của góc SEO cắt SO tại I, ta chứng minh I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Gọi H_1, H_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên SE, SF.



$\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp OE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOE) \Rightarrow BC \perp IH_1$

$\begin{cases} IH_1 \perp SE \\ IH_1 \perp BC \end{cases} \Rightarrow IH_1 \perp (SBC) \Rightarrow IH_1 = d(I,(SBC))$

Tương tự $IH_2 = d(I,(SAB))$.

Hai tam giác vuông SOE và SOF có SO chung , $OE = OF$ nên chúng bằng nhau suy ra hai đoạn tương ứng IH_1, IH_2 bằng nhau . Chứng minh tương tự ta có I cách đều 4 mặt bên của hình chóp đã cho.

Mặt khác I thuộc đường phân giác trong của $SEO \Rightarrow IO = IH_1$.

Vậy I cách đều tất cả các mặt của hình chóp $SABCD$ mà I ở trong hình chóp do đó I là tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp $S.ABCD$.

Áp dụng tính chất của chân đường phân giác ta có

$$\frac{IO}{IS} = \frac{OE}{SE} \Rightarrow \frac{IO}{IO+IS} = \frac{OE}{OE+SE} \Rightarrow \frac{IO}{SO} = \frac{OE}{OE+SE}$$

$$\Rightarrow IO = \frac{SO.OE}{OE+SE} = \frac{a.\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}} = \frac{a}{1+\sqrt{5}}.$$

Vậy bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $r = \frac{a}{1+\sqrt{5}}$.

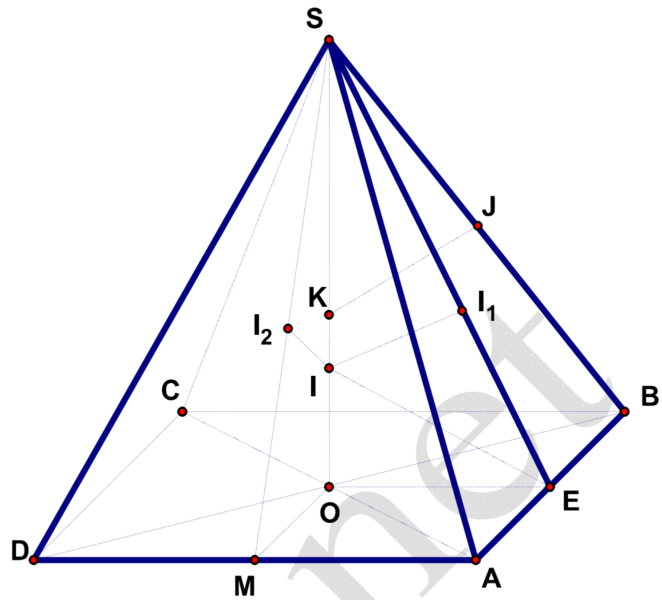
Ví dụ 3.3.5 Một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và $ASB = \alpha$.
1. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp;
2. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp;
3. Chứng minh rằng hai tâm mặt cầu đó trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha = 45^0$.

Lời giải.

1.Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp .

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có SO vuông góc với $(ABCD)$ và SO là trục của hình vuông $ABCD$.
Trong mặt phẳng (SBO),đường trung trực (d) của cạnh SB cắt SO tại K, ta có
$K \in SO \Rightarrow KA = KB = KC = KD$

$K \in (d) \Rightarrow KB = KS$
$\Rightarrow KA = KB = KC = KD = KS$



Vậy K là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Hai tam giác vuông SOB và SJK đồng dạng (J là trung điểm của SB) suy ra:

$$\frac{SK}{SB} = \frac{SJ}{SO} \Rightarrow SK = \frac{SB.SJ}{SO} = \frac{SB^2}{2SO} \quad (1)$$

Gọi E là trung điểm của AB

Trong tam giác vuông SEB: $SB = \dfrac{EB}{\cos ESB} = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Trong tam giác vuông SOE,

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Từ (1) suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

$$R = SK = \frac{\dfrac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

2.Xác định tâm và bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.
Gọi E,M lần lượt là trung điểm của AB,AD và I là chân đường phân giác của SEO. Gọi I_1,I_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên SE,SM.

$\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp II_1$

$II_1 \perp AB, II_1 \perp SE \Rightarrow II_1 \perp (SAB) \Rightarrow II_1 = d(I,(SAB))$

Tương tự $II_2 = d(I,(SAD))$.

Hai tam giác vuông SOE và SOM bằng nhau suy ra hai đoạn tương ứng $II_1 = II_2$

$\Rightarrow d(I,(SAB)) = d(I,(SAD))$

Chứng minh tương tự ta có I cách đều 4 mặt bên của hình chóp $S.ABCD$,

$IO = d(I,(ABCD)$ và I là chân đường phân giác trong của $SEO \Rightarrow IO = II_1$.

I ở trong hình chóp $S.ABCD$ và I cách đều tất cả các mặt của hình chóp $S.ABCD$ nên I là tâm của mặt cầu nội tiếp của hình chóp này.

Áp dụng tính chất của chân đường phân giác ta có :

$\frac{IO}{IS} = \frac{ES}{EO} \Rightarrow \frac{IO}{IS+IO} = \frac{ES}{ES+EO} \Rightarrow \frac{IO}{SO} = \frac{ES}{ES+EO}$

$$\Rightarrow r = IO = \frac{SO.ES}{ES+EO} = \frac{\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.\frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}}{\frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}+\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}\cot\frac{\alpha}{2}}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.Chứng minh rằng hai tâm mặt cầu đó trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha = 45^0$.

Khi K trùng với I ta có $\begin{cases} KI_1 = KO \\ KS = KA \end{cases} \Rightarrow \Delta SKI_1 = \Delta KOA \Rightarrow I_1S = OA.$

OA là bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Mặt khác khi K trùng I thì I_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SAB nên I_1S là bán kính của đường tròn này .

Suy ra $\frac{AB}{\sin ASB} = \frac{AB}{\sin ACB} \Rightarrow \sin ASB = \sin ACB \Rightarrow ASB = ACB$

Mặt khác khi $\alpha = 45^0$ thì hai bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác SAB và ACB bằng nhau $\Rightarrow d(K,(SAB)) = d(K,(ABCD))$.

$\Rightarrow K$ cách đều các mặt của hình chóp $S.ABCD$ $\Rightarrow K$ trùng với I.

Vậy $K \equiv I \Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa cạnh bên SB với đáy là 60^0. ΔABC vuông tại $B, AB = a\sqrt{3}, ACB = 30^0$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, M, N nằm trên một mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó biết rằng $BAC = \alpha, BC = a$.

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SBC) \perp (ABC)$ và $AB = AC = SA = SB = a$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp khi $SC = x$.

Bài 2

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BAD = 60^0$ và các cạnh bên $SA = SB = SC$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $SBCD$ biết $BSD = 90^0$.

Bài 3

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D, $AB = AD = a, CD = 2a$. Cạnh bên $SD \perp (ABCD)$ và $SD = a$. Gọi E là trung điểm của DC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

2. Trong hình phẳng (P) cho nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2R$. Qua A kẻ đường thẳng Ax vuông góc với (P), trên Ax lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P) bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính hình cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D.

Bài 4

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$, các cạnh còn lại bằng $\sqrt{74}$. Hãy tìm bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm những điểm M sao cho trọng tâm của các tứ diện $MBCD, MCDA, MDAB, MABC$ cách đều tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 5

1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB = a;\ AA' = a\sqrt{3};\ ABC = 60^0$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a,$ góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC.$ Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo $a.$

Bài 6

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là đường thẳng $\Delta.$ Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a.$ Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB.$ Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo $a.$

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 7

Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (O). Gọi A_0, B_0, C_0, D_0 lần lượt là trọng tâm của các mặt BCD, CDA, DAB, ABC. Kẻ các đường kính AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 .Chứng minh rằng:

1.Các đường thẳng $A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0, D_1D_0$ đồng quy tại điểm H,

2.Các đường thẳng đi qua H và trung điểm của cạnh thì vuông góc với cạnh đối diện.

Bài 8

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác ABC với góc nhọn $BAC = \alpha; BC = k; AA' = h$.

1.Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.

2. ả sử mp$(BCC'B')$ thay đổi nhưng $AB + AC = a$ (a không đổi). Cho $\alpha = 60^0$ và h không đổi. Tìm k để bán kính mặt cầu bé nhất.

Bài 9

Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp trong mặt cầu bán kính r, tìm hình chóp có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Bài 10

Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung. Trên tia Ax lấy điểm M, trên tia By lấy điểm N sao cho $AM + BN = MN$.

1.Tìm vị trí của M, N sao cho bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABMN$ là lớn nhất.
2. Chứng minh rằng khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABMN$ là nhỏ nhất.
Bài 11
Cho hình cầu tâm O bán kính R. Lấy một điểm A ở trên mặt cầu và gọi (P) là mp đi qua A sao cho góc giữa (P) và OA bằng 30^0.
a) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (P) và mặt cầu.
b) Đường thẳng d đi qua A vuông góc với mp(P) cắt mặt cầu tại B. Tính độ dài đoạn AB.
Bài 12
Cho hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P').
a) Chứng minh có mặt cầu đi qua hai đường tròn đó.
b) Tìm bán kính R của mặt cầu biết $r_1 = 5; r_2 = \sqrt{10}; AB = 6;\ O_1O_2 = \sqrt{21}$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC
Bài 13
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy một góc 45^0. Một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh bên BS kéo dài tại H. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm I của mặt cầu và trung điểm đường cao BD của đáy. Tính bán kính cầu đó.
Bài 14
1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$, $BAC = 120^0$, $CAD = 60^0$, $DAB = 90^0$. Xác định bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.
2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và $ASB = \alpha$.
a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.
c) Tìm giá trị của α để tâm mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp trùng nhau.
3. Cho hình cầu bán kính R. Từ một điểm S trên mặt cầu vẽ ba cát tuyến bằng nhau cắt mặt cầu tại A, B, C sao cho $ASB = BSC = CSA = \alpha$. Tìm α để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.
Bài 15

1. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G, nội tiếp trong một mặt cầu $(O;R)$. Các đường thẳng GA, GB, GC, GD lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A', B', C', D'. Chứng minh: $V_{ABCD} \le V_{A'B'C'D'}$

2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ đỉnh S, cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.

a) Tính các bán kính R và r của hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp tương ứng hình chóp đó.

b) Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp, hình cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp. Xác định quan hệ giữa a và h sao cho :

b1) $\dfrac{V_2}{V}$ đạt giá trị lớn nhất. b2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

3. Giả sử mặt cầu có tâm I thuộc cạnh AB, bán kính r_I tiếp xúc với các cạnh AC, AD, BC và BD; mặt cầu tâm J thuộc cạnh CD, bán kính r_J tiếp xúc với các cạnh CA, CB, DA, DB của hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh: $\dfrac{AB^4}{CD^4} = \dfrac{AB^2 - 4r_I^2}{CD^2 - 4r_J^2}$.

4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = 1$ và cạnh đáy của tam giác ABC bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB, AC tương ứng . Tìm bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp $S.AMN$.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh 2a**,** góc $\angle ABC = 60^0$. Đường cao SO=b. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

6. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$. Hai mặt ACD và BCD là những tam giác đều cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Xác định x khi DM là đường cao của tứ diện $ABCD$.

b) Giả sử DM vuông góc với $mp(ABC)$. Tính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.