A. $(5;1;2)$ và $(1;-5;6)$

B. $(5;1;2)$ và $(-1;-8;-4)$

C. $(5;-1;2)$ và $(1;-5;6)$

D. $(5;1;2)$ và $(6;9;2)$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: $M(5+2t;1+3t;2-2t)\in d$; $\overrightarrow{AM}(2+2m;3+3m;-2-2m)$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{17}\Leftrightarrow 17(1+m)^2=17\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(5;1;2)\\M(1;-5;6)\end{array}\right.$$

Cách 2: Kiểm tra các điểm thuộc đường thẳng d có 2 cặp điểm trong đáp án B và C thuộc đường thẳng d . Dùng công thức tính độ dài AM suy ra đáp án C thỏa mãn.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$ và điểm $D(0;3;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A,B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P) là:

A. $\left[\begin{array}{l}4x+2y+7z-15=0\\2x+3z-5=0\end{array}\right.$

B. $2x+3z-5=0$

C. $4x+2y+7z-15=0$

D. $\left[\begin{array}{l}4x-2y+7z-1=0\\2x+3z-5=0\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Trường hợp 1: (P) qua AB và song song với CD, khi đó (P) có vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right]=(-8;-4;-14)$ nên phương trình của $(P): 4x+2y+7z-15=0$.

Trường hợp 2: (P) qua AB cắt trung điểm CD tại trung điểm I của đoạn CD. Ta có $I(1;1;1)\Rightarrow\overrightarrow{AI}(0;-1;0)$, vectơ pháp tuyến của (P) là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(2;0;3)$ nên phương trình $(P): 2x+3z-5=0$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, gọi (*P*) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mp(P)?

A. $N(-1;-2;-1)$ B. $M(3;0;2)$ C. $E(-3;0;4)$ D. $F(1;2;1)$

Hướng dẫn giải:

Gọi $\vec{n}(a;b;c);\vec{n}\neq\vec{0}$ là VTPT của *(P)*; α là góc tạo bởi *(P)* và *Oy*. α lớn nhất khi $sin\alpha$ lớn nhất

Ta có $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u_d}$ nên $\vec{n}(b+2c;b;c)$

$\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{j}\right)\right|=\dfrac{|b|}{\sqrt{2b^2+5c^2+4bc}}$

Nếu $b=0$ thì $\sin\alpha=0$

Nếu $b\neq0$ thì $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}c}{b}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\dfrac{6}{5}}}$. Khi đó, $sin\alpha$ lớn nhất khi $\dfrac{c}{b}=-\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow$ chọn $b=5;c=-2$

Vậy, phương trình mp(P) là $x+5y-2z+9=0$. Do đó ta có $N\in(P)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho điểm $M(0;-1;\ 2),N(-1;1;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M,N và tạo với mặt phẳng $(Q):2x-y-2z-2=0$ góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mp(P) một khoảng là:

A. $\sqrt{3}$ B. $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ C. $\dfrac{7\sqrt{11}}{11}$ D. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải:

(P) có VTPT $\vec{n}$ vuông góc với $\overrightarrow{MN}(-1;2;1)$ nên $\vec{n}(2b+c;\ b;\ c)$.

Gọi α là góc tạo bởi *(P)* và *(Q)*, α nhỏ nhất khi cosα lớn nhất.

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{3|b|}{\sqrt{5b^2+2c^2+4bc}}$

Nếu $b=0$ thì $\cos\alpha=0$

Nếu $b\neq 0$ thì $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{2\left(\dfrac{c}{b}+1\right)^2+3}}$. Khi đó, $\cos\alpha$ lớn nhất khi $\dfrac{c}{b}=-1\Rightarrow$ chọn $b=1;c=-1$

Vậy, phương trình mp(P) là $x+y-z+3=0$. Do đó $d\left(A,(P)\right)=\sqrt{3}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho $(P):x-2y+2z-1=0$ và 2 đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+9}{6}$; $\Delta_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Gọi M là điểm thuộc đường thẳng Δ_1, M có toạ độ là các số nguyên, M cách đều Δ_2 và (P) Khoảng cách từ điểm M đến mp(*Oxy*) là:

A. 3 B. $2\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D.2

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(t-1;t;6t-9\right),t\in\mathbb{Z}$.

Ta có $d\left(M,\Delta_2\right)=d\left(M,(P)\right)\Leftrightarrow\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=d\left(M,(P)\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{29t^2-88t+68}=\dfrac{|11t-20|}{3}$ với $M_0\left(1;3;-1\right)\in\Delta_2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{53}{35}\end{array}\right.\xrightarrow{t\in\mathbb{Z}}t=1$

Vậy, $M\left(0;-1;3\right)\Rightarrow d\left(M,(\mathrm{Oxy})\right)=3$

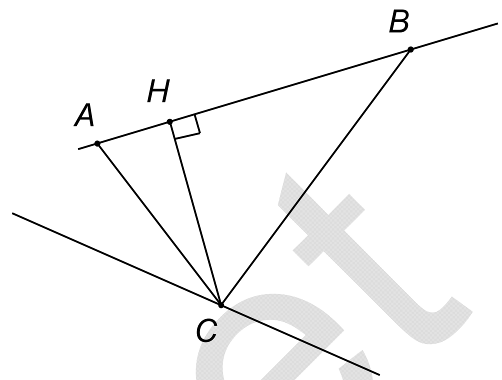
Câu 4. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho 2 điểm $A\left(1;5;0\right);B\left(3;3;6\right)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Gọi *C* là điểm trên đường thẳng *d* sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất. Khoảng cách giữa 2 điểm A và C là:

A. $\sqrt{29}$ B. 29 C. $\sqrt{33}$ D. 7

Hướng dẫn giải:

Ta có 2 đường thẳng AB và d chéo nhau.

Gọi C là điểm trên d và H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB.



Vì $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.CH=\sqrt{11}.CH$ nên S_{ABC} nhỏ nhất khi CH nhỏ nhất $\Leftrightarrow CH$ là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng AB và d.

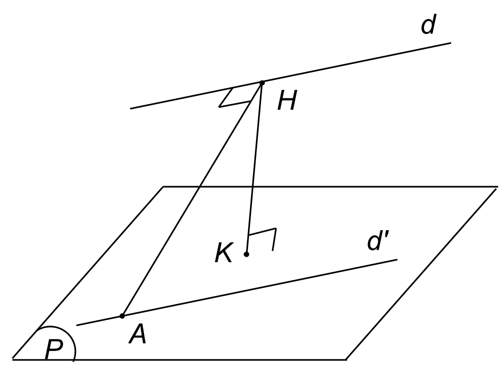
Ta có $C(1;0;2)\Rightarrow AC=\sqrt{29}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp(P) là:

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$ B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$ C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$

Hướng dẫn giải:

Vì (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d.



Gọi H là hình chiếu của A trên d, K là hình chiếu của H trên (P).

Ta có $d(d,(P))=HK\le AH$ $(AH\ không\ đổi)$

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Rightarrow$ $d(d,(P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P).

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q).

$\Rightarrow \vec{n}_P=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_Q\right]=(98;14;-70)$

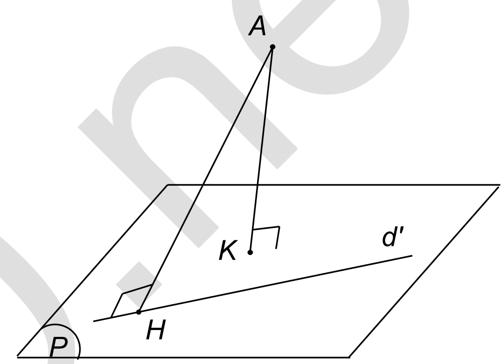
$\Rightarrow (P):7x+y-5z-77=0\Rightarrow d(M,(P))=\frac{97\sqrt{3}}{15}$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P)?

A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$ D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên (P).



Ta có $d(A,(P)) = AK \leq AH$ (Không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Longrightarrow d(A,(P))$ lớn nhất khi $K \equiv H$.

Ta có $H(3;1;4)$, (P) qua H và $\perp AH$

$\Rightarrow (P): x-4y+z-3=0$

Vậy $d(M,(P))=\frac{11\sqrt{18}}{18}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=2+2t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=3-t'\\y=1+t'\\z=1-2t'\end{cases}$.

Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P), cắt d,d' và tạo với d góc 30^0.

Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải:

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (*P*).

Gọi $M(1+t;t;2+2t)$ là giao điểm của Δ và d; $M'(3-t';1+t';1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overrightarrow{MM'}(2-t'-t;1+t'-t;-1-2t'-2t)$

$MM'//(P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \notin (P) \\ \overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{n_P} \end{cases} \Leftrightarrow t' = -2 \Rightarrow \overrightarrow{MM'}(4-t;-1-t;3-2t)$

Ta có $\cos 30^0 = \cos\left(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}_d\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Vậy, có 2 đường thẳng thoả mãn là $\Delta_1: \begin{cases} x=5 \\ y=4+t \\ z=10+t \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x=t' \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$.

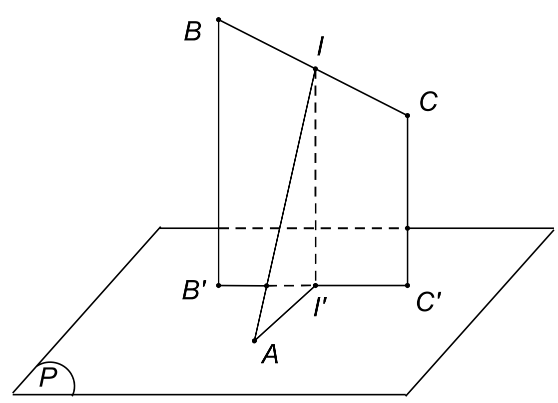
Khi đó, $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2}$

Câu 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho 3 điểm $A(1;0;1); B(3;\ -2;0); C(1;2;\ -2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

A. $E(1;3;1)$ B. $F(3;\ 0;\ -2)$ C. $G(-2;\ 0;\ 3)$ D. $H(0;3;1)$

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm đoạn BC; các điểm B', C', I' lần lượt là hình chiếu của B, C, I trên (P).



Ta có tứ giác $BCC'B'$ là hình thang và II' là đường trung bình.

$\Longrightarrow d(B,(P)) + d(C,(P)) = BB' + CC' = 2II'$

Mà $II' \leq IA$ (với IA không đổi)

Do vậy, $d(B,(P)) + d(C,(P))$ lớn nhất khi $I' \equiv A$

$\Longrightarrow (P)$ đi qua A và vuông góc $\overrightarrow{IA}$ với $I(2;0;\ -1)$

$\Longrightarrow (P):\ -x + 2z - 1 = 0 \Longrightarrow E(1;3;1) \in (P)$

Câu 9. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz* cho các điểm $A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Biết rằng $mp(ABC)$ vuông góc với $mp(P)$ và $d(O;(ABC))=\frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây **đúng**:

A. $b+c=1$ B. $2b+c=1$ C. $b-3c=1$ D. $3b+c=3$

Hướng dẫn giải:

Ta có phương trình mp(ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$(ABC)\perp(P)\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\Rightarrow b=c\,(1)$

Ta có $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=8\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow b+c=1$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho 3 điểm $A(1;2;3); B(0;1;1); C(1;0;-2)$. Điểm $M\in(P): x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó ,điểm M cách $(Q): 2x-y-2z+3=0$ một khoảng bằng:

A. $\frac{101}{54}$ B. 24 C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{121}{54}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có $T=6x^2+6y^2+6z^2-8x-8y+6z+31$

$$\Rightarrow T=6\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{145}{6}$$

$\Rightarrow T=6MI^2+\frac{145}{6}$ với $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow T$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Rightarrow M\left(-\frac{5}{18};-\frac{5}{18};-\frac{13}{9}\right)$.