$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

(α) qua $B(5;-2;3)$ nên $B=A$.

Vì $((\alpha),(\beta))=45^0$ nên $|5A-C|=3\sqrt{2A^2+C^2}$, suy ra

$$7A^2-10AC-8C^2=0\Rightarrow A=2C,\ A=-\frac{4}{7}C.$$

Từ đó tìm được hai mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha):\ 2x+2y+z-9=0,\ (\alpha):\ 4x+4y-7z+9=0.$$

6. (α) qua $C(1;\ -1;\ 1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì $((\alpha),(\gamma))=60^0$ nên $2|A-B|=\sqrt{2(A^2+B^2+C^2)}$.

Vì $d(O,(\alpha))=\frac{\sqrt{2}}{3}$ nên $3|-A+B-C|=\sqrt{2(A^2+B^2+C^2)}$.

Suy ra $2|A-B|=3|-A+B-C|$.

Do đó có hai trường hợp

Với $C=\frac{5(B-A)}{3}$ thì $2(A-B)^2=A^2+B^2+25\left(\frac{B-A}{3}\right)^2$ nên

$$8A^2-7AB+8B^2=0\Rightarrow A=B=0\ \text{(loại)}$$

Với $C=\frac{B-A}{3}$ thì $2(A-B)^2=A^2+B^2+\left(\frac{B-A}{3}\right)^2$ nên

$$4A^2-17AB+4B^2=0\Rightarrow A=4B,\ A=\frac{1}{4}B$$

Từ đó ta có hai mặt phẳng thỏa mãn

$4x+y-z-2=0;\ \ x+4y+z+2=0.$

Bài 13

1. Gọi $M\in(\alpha), M(x,y,z)$. Từ $d(M,(\alpha_1))=d(M,(\alpha_2))$ suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm (α): $5x+2y+7z+34=0$.

2. (α) song song với (α_3): $6x-3y-2z+1=0$ nên

$$(\alpha):\ 6x-3y-2z+D=0\ \ (D\neq 1).$$

$$d(A,(\alpha))=1\Leftrightarrow\frac{|2+D|}{7}=1\Rightarrow D=5;\ D=-9.$$

Có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$(\alpha):\ 6x-3y-2z+5=0,\ (\alpha):\ 6x-3y-2z-9=0.$$

3. (α) qua $B(-5;0;-3)$ nên có phương trình dạng

$$A(x+5)+By+C(z+3)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

(α) qua $C(2;-5;0)$ nên $B=\dfrac{7A+3C}{5}$.

Ta có $d(M,(\alpha))=d(N,(\alpha))\Leftrightarrow |6A-2B-3C|=|4A-4B+5C|$.

Giải ra ta có hai mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha):\ x+2y+z+8=0,\ (\alpha):\ 17x+31y+12z+121=0.$$

4. (α) qua $D(1;-3;1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-1)+B(y+3)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

(α) vuông góc với mặt phẳng $3x-2y+2z+4=0$ nên $2C=2B-3A$.

Ta có $d(E,(\alpha))=3\Leftrightarrow \dfrac{|4A+5B+2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=3$.

Suy ra $(A+7B)^2=9\left[A^2+B^2+\left(\dfrac{2B-3A}{2}\right)^2\right]$, tức là

$$113A^2-164AB-124B^2=0\Rightarrow A=2B;\ A=-\frac{62}{113}B.$$

Có hai mặt phẳng thỏa mãn là

$$(\alpha):\ 2x+y-2z+3=0,\ (\alpha):\ 62x-113y-206z-195=0.$$

5. (α) qua $F(4;2;1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-4)+B(y-2)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì $d(I,(\alpha))=\dfrac{7}{3}$, $d(J,(\alpha))=1$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}\dfrac{|-3A-3B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{7}{3}\\ \dfrac{|-A+2B|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3|-3A-3B+C|=7|-A+2B|\\ |-A+2B|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\end{cases}$$

Có hai trường hợp

Với $C=\dfrac{16A-5B}{3}$ thì $256A^2-124AB-2B^2=0\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}B;\ A=-\dfrac{1}{64}B$.

Suy ra các mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha):x+2y+2z-10=0,\ (\alpha):\ x-64y+112z+12=0.$$

Với $C=\dfrac{2A+23B}{3}$ thì

$$2A^2+64AB+251B^2=0\Rightarrow A=\frac{-32-3\sqrt{58}}{2}B;\ A=\frac{-32+3\sqrt{58}}{2}B.$$

Suy ra các mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha): (-32-3\sqrt{58})x+2y-(6+2\sqrt{58})z+130+14\sqrt{58}=0$$

$$(\alpha): (-32+3\sqrt{58})x+2y-(6-2\sqrt{58})z+130-14\sqrt{58}=0$$

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn.