$$V=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.r.\cot\varphi.\tan 2\varphi.(2r.\cot\varphi)^2=\frac{4}{3}r^3.\cot^3\varphi.\tan 2\varphi.$$

Mặt khác $V=\frac{1}{3}r.S_{tp}$ nên $S_{tp}=\frac{3V}{r}=4r^2.\cot^3\varphi.\tan 2\varphi=4r^2.f(\varphi)$.

Vì r không đổi nên S_{tp} nhỏ nhất khi $f(\varphi)=\cot^3\varphi.\tan 2\varphi$ nhỏ nhất.

Mà $f(\varphi)=\frac{1}{\tan^3\varphi}.\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}=\frac{2}{(1-\tan^2\varphi)\tan^2\varphi}$ và $0<\varphi<45^0$ nên $0<\tan\varphi<1$,

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(1-\tan^2\varphi)\tan^2\varphi\le\left(\frac{1-\tan^2\varphi+\tan^2\varphi}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Nên $f(\varphi)=\frac{2}{(1-\tan^2\varphi)\tan^2\varphi}\ge 8\Rightarrow S_{tp}\ge 32r^2$.

Vậy $\max S_{tp}=32r^2$. Đạt được khi

$$1-\tan^2\varphi=\tan^2\varphi\Rightarrow\tan\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow a=2\sqrt{2}.r,\ h=4r.$$

Bài 10

1. Gọi V là thể tích tứ diện $ABMN$. Ta tính được $V=\frac{AB^3}{12}$ là giá trị không đổi, mà $r=\frac{3V}{S_{tp}}$ nên r lớn nhất khi S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $AB=2a,\ AM=x,\ BN=y$.

Từ $AM+BN=MN$ suy ra $xy=2a^2$. Diện tích toàn phần của tứ diện là

$$S_{tp}=a(x+y)+\frac{1}{2}(y\sqrt{x^2+4a^2}+x\sqrt{y^2+4a^2}).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của S_{tp} đạt được khi

$x=y=a\sqrt{2}$, hay $AM=BN=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R=\sqrt{x^2+y^2+4a^2}$ nên

$$R=\sqrt{x^2+y^2+4a^2}\geq\sqrt{2xy+4a^2}=\sqrt{8a^2}=2\sqrt{2}a.$$

$\min R=2\sqrt{2}a$ khi $x=y=a\sqrt{2},$ hay đạt được tương ứng với bán kính mặt cầu nội tiếp đạt giá trị lớn nhất.

Bài 11

a) Gọi H là hình chiếu của O lên (P).

$OAH=\left(AO,(P)\right)=30^0$.

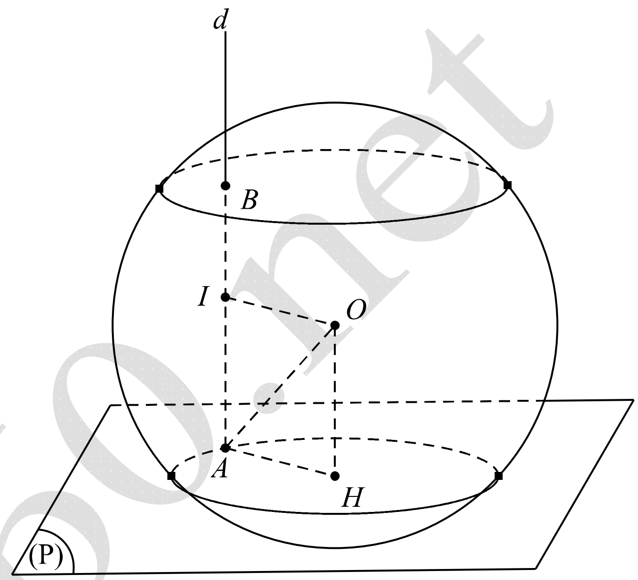
Ta có bán kính của đường tròn thiết diện là:

$r=AH=R.\cos 30^0\ \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Diện tích thiết diện là

$S=\pi r^2=\dfrac{3\pi R^2}{4}$.

b) Mặt phẳng (ABO) đi qua O nên cắt mặt cầu theo đường tròn lớn.



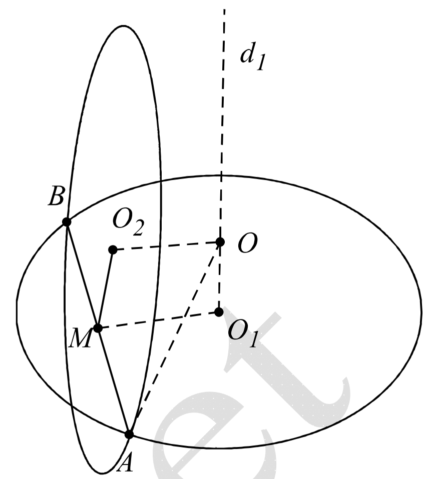
Gọi I là trung điểm của AB ta có $OI\perp AB$ nên tứ giác $OIAH$ là hình chữ nhật do đó $IA=OH=R\sin 30^0=\dfrac{R}{2}$.

Vậy $AB=2AI=R$.

Bài 12

Gọi d_1,d_2 lần lượt là hai đường thẳng đi qua O_1,O_2 và vuông góc với (P) và (P').

Gọi M là trung điểm AB ta có
$(MO_1O_2) \perp AB \Rightarrow d_1, d_2 \subset (MO_1O_2)$.
Gọi O là giao điểm của d_1 và d_2. Ta có O là tâm mặt cầu chứa (O_1) và (O_2). Bán kính $R = OA$.



$MO_1 = \sqrt{r_1^2 - MA^2} = 4; MO_2 = \sqrt{r_2^2 - MA^2} = 1$

Ta có tứ giác MO_1OO_2 là tứ giác nội tiếp.

$$\cos M = \frac{MO_1^2 + MO_2^2 - O_1O_2^2}{2MO_1.MO_2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow O_1MO_2 = 120^0 \Rightarrow O_1OO_2 = 60^0$$

Đặt $x = OO_2,\ y = OO_1, z = OM$. Áp dụng định lý cosin cho ΔO_1OO_2 ta có: $O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1.OO_2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = 21$ (1).

Do tứ giác MO_1OO_2 nội tiếp nên

$MO_1.OO_2 + MO_2.OO_1 = MO.O_1O_2 \Leftrightarrow 4x + y = \sqrt{21}.z$ (2)

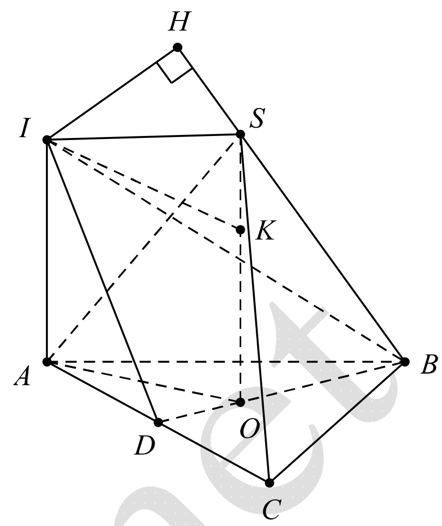
$OM^2 = MO_1^2 + O_1O^2 = MO_2^2 + O_2O^2 \Leftrightarrow z^2 = 16 + y^2 = 1 + x^2$ (3)

Giải hệ gồm ba phương trình (1),(2) và (3) ta tìm được

$x = 3\sqrt{3}; y = 2\sqrt{3}; z = 2\sqrt{7} \Rightarrow OA^2 = AO_1^2 + O_1O^2 = 37 \Rightarrow R = OA = \sqrt{37}$

Bài 13

1. Gọi R là bán kính của mặt cầu.



$IA \perp (ABC), BS \perp IH, IA = IH = R$. Gọi O là tâm của đáy, hạ $IK \perp SO$.

$SBO = 45^0 \Rightarrow SO = OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SB = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Tứ giác $IAOK$ là hình chữ nhật nên

$IA = OK = R; IK = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$SK = SO - IA = \frac{a\sqrt{3}}{3} - R$;

$HS = BH - BS = BA - BS = a - \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vì $IH^2 + HS^2 = IK^2 + SK^2$ nên suy ra

$$R^2 + \left(a - \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - R\right)^2.$$

Ta tìm được $R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2}$.

Bài 14

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 120^0 = 3a^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3}a$$

Tam giác ACD đều nên $CD = a$. Vì ΔABD vuông cân tại A nên $BC = \sqrt{2}a$.

Ta có $BC^2 + CD^2 = 3a^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại D.

Gọi H là trung điểm của BC ta có $AH \perp BC \quad (1)$.

$AH = AB\sin 30^0 = \frac{a}{2}$;

$DH = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow AH^2 + DH^2 = a^2 = AD^2 \Rightarrow AH \perp DH \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (BCD)$ nên AH là đường cao của tứ diện ABCD.

Thể tích tứ diện: $V = \frac{1}{3}AH.S_{\Delta BCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Diện tích toàn phần của tứ diện :

$$\sum S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} + S_{\Delta BCD} = \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})a^2}{2}$$

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp, ta có $r = \frac{3V}{\sum S} = \frac{\sqrt{2}a}{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$.

2. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

a) Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Gọi H là tâm của hình vuông ABCD. Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng (SHA) kẻ đường trung trực cạnh SA cắt SH tại O. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD, bán kính $R = SO$.

Gọi N là trung điểm SA, ta có:

$$\Delta SNO \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SN}{SO} = \frac{SH}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SN.SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}.$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác cân SAB ta có :

$$\frac{SA}{\sin(\frac{180^0-\alpha}{2})} = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow SA = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}}; SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vậy $R = SO = \frac{a}{4\sqrt{\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}}$.

b) Tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp.

Ta có tâm I của mặt cầu nội tiếp thuộc đường thẳng SH. Gọi M là trung điểm của

AB, ta có $AB \perp (SHM)$ tại M. Gọi I là chân đường phân giác trong của góc SMH $(I \in SH)$. Ta có I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp . Bán kính $r = IH$.

Để tính bán kính r ta có thể tính theo hai cách sau:

Cách 1. Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS+MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH.MH}{MS+MH};$$

$$SM = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}, MH = \frac{a}{2}.$$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: $r = IH = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}$.

Cách 2. Dựa vào công thức $r = \dfrac{3V}{\sum S}$.

Thể tích khối chóp: $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{3.2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$\sum S = 4S_{\Delta SAB} + S_{ABCD} = 4.\frac{1}{2}SM.AB + a^2 = \frac{a^2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Bán kính $r = \dfrac{3V}{\sum S} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}$.

c) Tâm của hai hình cầu trùng nhau $\Leftrightarrow R + r = SH$.

Hay: $\dfrac{a}{4\sqrt{\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin\alpha - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0.$$

Vậy khi $\alpha = 45^0$ thì tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp trùng nhau.

3. Vì $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA = \alpha$ nên $AB = BC = CA$