$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{7}(-4;\ 5;\ 2)$, hay đường thẳng d là $d: \ \frac{x+1}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$.

Bài 15. $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$, $A(1;\ 4;\ 2), B(-1;\ 2;\ 4)$.

1. Hình chiếu của A trên d là $H\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{10}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm (P): $5x + 13y - 4z + 21 = 0$.

2. Gọi véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}(a;\ b;\ c)$.

$$\cos((P),\ (Oxy)) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + (a-2c)^2 + c^2}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức có khi (P): $x - y + z - 3 = 0$.

3. Gọi véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}(a;\ b;\ c)$.

$$\sin((P),\ Oy) = \frac{|a-2c|}{\sqrt{a^2 + (a-2c)^2 + c^2}} \le \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Đẳng thức có khi (P): $x + 5y - 2z + 9 = 0$.

Vấn đề 2.

Bài 1

1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;-5;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;-1;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (14;-8;-2)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là: $7x - 4y - z - 1 = 0$.

2. Ta có

$$(\alpha)//(ABC) \Leftrightarrow \frac{2a+b}{7} = \frac{3a+2b}{-4} = \frac{-1}{-1} \ne \frac{1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ 3a+2b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=-29 \end{cases}$$

3. Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{AE} + 4\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{CE} = \vec{0}$ (*)

Vì $2\overrightarrow{AE} = (2x-4; 2y-6; 2z-2)$; $4\overrightarrow{BE} = (4x+4; 4y+8; 4z)$;

$-3\overrightarrow{CE} = (-3x+3; -3y+6; -3z-6)$

Suy ra $2\overrightarrow{AE} + 4\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{CE} = (3x+3; 3y+8; 3z-8)$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3=0 \\ 3y+8=0 \\ 3z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{8}{3} \\ z=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(-1;-\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

Khi đó: $S=2\left(\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EM}\right)^2+4\left(\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EM}\right)^2-3\left(\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EM}\right)^2$

$=3EM^2+2EA^2+4EB^2-3EC^2+2\overrightarrow{EM}\left(2\overrightarrow{AE}+4\overrightarrow{BE}-3\overrightarrow{CE}\right)$

$=3EM^2+2EA^2+4EB^2-3EC^2$

Vì $2EA^2+4EB^2-3EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow EM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của E lên mặt phẳng (β).

Gọi $M(x;y;z)$, ta có: $\overrightarrow{EM}=\left(x+1;y+\dfrac{8}{3};z-\dfrac{8}{3}\right)$

Do $EM\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{EM}=k.\vec{n}$ (Trong đó $\vec{n}=(3;1;-1)$ là VTPT của (β))

Suy ra $\begin{cases} x=3k-1 \\ y=k-\dfrac{8}{3} \\ z=-k+\dfrac{8}{3} \end{cases}$.

Mặt khác

$M\in(\beta)\Rightarrow 3(3k-1)+\left(k-\dfrac{8}{3}\right)-\left(-k+\dfrac{8}{3}\right)+1=0\Leftrightarrow 11k-\dfrac{22}{3}=0\Leftrightarrow k=\dfrac{2}{3}$

Vậy $M(1;-2;2)$ là điểm cần tìm.

4. Gọi $K(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{AK}-5\overrightarrow{BK}+7\overrightarrow{CK}=\vec{0}$ (**)

Mà $3\overrightarrow{AE}=(3x-6;3y-9;3z-3);-5\overrightarrow{BK}=(-5x-5;-5y-10;-5z)$;

$7\overrightarrow{CK}=(7x-7;7y-14;7z+14)$

Suy ra $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-18=0 \\ 5y-33=0 \\ 5z+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{18}{5} \\ y=\dfrac{33}{5} \\ z=-\dfrac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow K\left(\dfrac{18}{5};\dfrac{33}{5};-\dfrac{11}{5}\right)$.

Khi đó $P=5\left|\overrightarrow{NK}\right|=5NK$, suy ra P nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ là hình chiếu của K lên (γ)

Từ đó ta tìm được $N(3;6;-2)$.

Bài 2

1. Gọi tọa độ điểm M là $M(x;\ y;\ z)$, ta có $\overrightarrow{AM}(x+2;\ y-3;\ z-1)$ và $\overrightarrow{BM}=(x-5;\ y+2;\ z-7)$, $\overrightarrow{CM}=(x-1;\ y-8;\ z+1)$ nên

$$MA^2=(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2$$
$$MB^2=(x-5)^2+(y+2)^2+(z-7)^2$$
$$MC^2=(x-1)^2+(y-8)^2+(z+1)^2$$

Do đó đẳng thức $MA^2+MB^2=MC^2$ tương đương với

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2+(x-5)^2+(y+2)^2+(z-7)^2$$
$$=(x-1)^2+(y-8)^2+(z+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+14y-18z+26=0$$

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu tâm $I(2;\ -7;\ 9)$, bán kính $R=6\sqrt{3}$.

2. Tương tự câu 1, ta có $\overrightarrow{AB}=(7;\ -5;6)$ nên

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=(x+9;\ y-8;\ z+5)$, $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=(2x-6;\ 2y-6;\ 2z-6)$

Nên $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right|$

$$\Leftrightarrow (x+9)^2+(y-8)^2+(z+5)^2=(2x-6)^2+(2y-6)^2+(2z-6)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-42x-8y-34z-62=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-14x-\frac{8}{3}y-\frac{34}{3}z-\frac{62}{3}=0$$

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu tâm $I\left(7;\,\frac{4}{3};\,\frac{17}{3}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{935}}{3}$.

Bài 3

1. Gọi trọng tâm của tam giác ABC là $G(1;\,2;\,2)$.

Khi đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên

$$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của G trên (P).

Ta tìm được điểm $M(4;\,-1;\,0)$ là điểm cần tìm.

2. Gọi $E(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}-4\overrightarrow{EC}=\vec{0}$, ta tìm được tọa độ điểm

$E(7;-16;-7)$.

Ta có: $MA^2+2MB^2-4MC^2=-MG^2+GA^2+2GB^2-4GC^2$

Nên $MA^2+2MB^2-4MC^2$ lớn nhất khi M là hình chiếu của điểm E trên mặt phẳng (P).

Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x-7}{3}=\frac{y+16}{-3}=\frac{z+7}{-2}\\ 3x-3y-2z-15=0\end{cases}\Rightarrow M\left(-\frac{25}{11};\,-\frac{74}{11};\,-\frac{9}{11}\right).$$

Bài 4 Vì điểm $M\in\Delta$ nên $M(1-t;\,-2+t;\,2t),t\in\mathbb{R}$.

1. Ta có $\overrightarrow{MA}(t;\,6-t;\,2-2t)$, $\overrightarrow{MB}(t-2;\,4-t;\,4-2t)$. Nên

$$T=MA^2+MB^2=t^2+(6-t)^2+(2-2t)^2+(t-2)^2+(4-t)^2+(4-2t)^2$$

$$=12t^2-48t+76=12(t-2)^2+28\geq 28\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Hay giá trị nhỏ nhất của $T=28$ khi $t=2$, hay $M(-1;\,0;\,4)$.

Vậy $M(-1;\,0;\,4)$ là điểm cần tìm

2. Ta có $\overrightarrow{OM}=(1-t;\ -2+t;\ 2t),\ \overrightarrow{AM}=(-t;\ t-6;\ 2t-2),\ \overrightarrow{BM}=(2-t;\ t-4;\ 2t-4).$

Do đó $\vec{w}=3\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}=(-5-t;\ t-2;\ 2t+12).$

Nên ta có $\left|\vec{w}\right|=\sqrt{(-5-t)^2+(t-2)^2+(2t+12)^2}=\sqrt{6t^2+54t+173}$

$$=\sqrt{6\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{319}{2}}\geq\frac{\sqrt{638}}{2}\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|3\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}\right|$ là $\frac{\sqrt{638}}{2}$, đạt được khi $M\left(\frac{5}{2};\ -\frac{7}{2};\ -3\right).$

3. Ta có $\overrightarrow{AM}(-t;\ t-6;\ 2t-2),\ \overrightarrow{AB}(-2;\ -2;\ 2)$ nên

$\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}\right]=(6t-16;\ 4-2t;\ 4t-12).$

Vì thế diện tích tam giác MAB là

$$S_{MAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(6t-16)^2+(4-2t)^2+(4t-12)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{56\left(t-\frac{19}{7}\right)^2+\frac{24}{7}}\geq\frac{\sqrt{42}}{7}$$

Vậy $S_{\Delta MAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow t=\frac{19}{7}\Rightarrow M\left(-\frac{12}{7};\ \frac{5}{7};\ \frac{38}{7}\right).$

Bài 5 $\overrightarrow{AB}(-5;3;-8),\overrightarrow{BC}(7;0;2),\overrightarrow{CA}(-2;-3;6).$

1. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=47,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=51,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=2$ đều dương, nên tam tam giác ABC là tam giác nhọn.

2. Từ $M(t;t;t)\Rightarrow\overrightarrow{MA}(3-t;-2-t;5-t)$ nên

$$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BC}=\left(24-t;\ -2-t;\ 11-t\right)$$

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(24-t)^2+(2+t)^2+(11-t)^2}=\sqrt{3(t-11)^2+338}$$

Giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{BC}\right|$ là $13\sqrt{2}$ khi $M(11;11;11)$.

3. Ta có $f(t)=2MA^2+MB^2-4MC^2=-3t^2+24t-18$.

Hay $f(t)=30-3(t-4)^2\le 30\quad \forall t\in\mathbb{R}$.

Nên giá trị lớn nhất của $f(t)$ là 30, khi $M(4;\,4;\,4)$.

Bài 6.

1. Tọa độ của trọng tâm tam giác ABC là $G(2;4;3)$.

Gọi H là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P), khi đó $\overrightarrow{GH}=t.\vec{n}_{(P)}$,

hay $\overrightarrow{GH}=(t;t;t)\Rightarrow H(2+t;\,4+t;\,3+t)$.

Mặt khác, điểm H thuộc mặt phẳng (P) nên

$$(2+t)+(4+t)+(3+t)-3=0\Leftrightarrow 3t+6=0\Leftrightarrow t=-2.$$

Vậy tọa độ hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) là $H(0;2;1)$.

2. Điểm G' đối xứng với G qua mặt phẳng (P) khi và chỉ khi H là trung điểm của GG', nên

$$\begin{cases}x_G+x_{G'}=2x_H\\ y_G+y_{G'}=2y_H\\ z_G+z_{G'}=2z_H\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{G'}=2x_H-x_G\\ y_{G'}=2y_H-y_G\\ z_{G'}=2z_H-z_G\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{G'}=-2\\ y_{G'}=0\\ z_{G'}=-1\end{cases}\Rightarrow G'(-2;0;-1).$$

Vậy tọa độ điểm G' là $G'(-2;0;-1)$.

3. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có $MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+GA^2$.

Tương tự $MB^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+GB^2$, $MC^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+GC^2$.

Do đó $T=3MG^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+GA^2+GB^2+GC^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

Vì thế, biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của điểm G trên mặt phẳng ABC.

Tọa độ điểm M cần tìm là $M\equiv H(0;2;1)$.

Bài 7. Vì điểm $M\in\Delta$ nên $M(-1+t;\,1-2t;\,2t),t\in\mathbb{R}$.

1. Ta có $\overrightarrow{MA}(2-t;\,2t-1;-1-2t)$ và

$\overrightarrow{MB}(1-t;\,1+2t;\,3-2t)$, $\overrightarrow{MC}(-t;\,-2t;\,1-2t)$

$\Rightarrow T=MA^2+2MB^2-4MC^2$

$=-9t^2-8t+24=-\left(3t+\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{232}{9}\ge\dfrac{232}{9}\quad\forall t\in\mathbb{R}$.

Giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{232}{9}$ khi $t = -\dfrac{4}{3}$, hay $M\left(-\dfrac{13}{9};\ \dfrac{17}{9};\ -\dfrac{8}{9}\right)$.

Vậy điểm M cần tìm là $M\left(-\dfrac{13}{9};\ \dfrac{17}{9};\ -\dfrac{8}{9}\right)$.

2. Ta có $\overrightarrow{BC}(-1;\ -1;\ -2)$ nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} = (t-3;\ -2t;\ 2t-1)$.

Vì vậy $\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(t-3)^2 + (-2t)^2 + (2t-1)^2}$

$$= \sqrt{9t^2 - 10t + 10} = \sqrt{\left(3t - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{65}{9}} \geq \frac{\sqrt{65}}{3}\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}\right|$ là $\dfrac{\sqrt{65}}{3}$, đạt được khi điểm

M có tọa độ $M\left(-\dfrac{4}{9};\ -\dfrac{1}{9};\ \dfrac{10}{9}\right)$.

Bài 8.

1. Δ_m qua $A(1;\ 0;\ -2)$ và véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta_m}(2;\ 1-m;\ m)$.

Ta có $\overrightarrow{OA}(1;\ 0;\ -2)$ nên $\left[\overrightarrow{OA},\ \vec{u}_{\Delta_m}\right] = (2-2m;\ -4-m;\ 1-m)$.

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ_m là

$$d(O,\ \Delta_m) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \vec{u}_{\Delta_m}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta_m}\right|} = \sqrt{\frac{6m^2 - 2m + 21}{2m^2 - 2m + 5}}.$$

Giá trị lớn nhất của $d(O,\ \Delta_m)$ bằng $\sqrt{5}$ khi $m = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $d(O,\ \Delta_m)$ bằng $\dfrac{5}{3}$ khi $m = -4$.

2. Góc giữa đường thẳng Δ_m và mặt phẳng (yOz) là

$$\sin(\Delta_m, (xOy)) = \left|\cos(\vec{u}_{\Delta_m},\ \vec{n}_{(xOy)})\right| = \frac{|m|}{\sqrt{2m^2 - 2m + 5}}.$$

Giá trị lớn nhất cần tìm là $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ khi $m = 5$.

3. Oy qua O và có $\vec{u}_{Oy}(0;1;0)$.

Ta có $\left[\vec{u}_{Oy},\ \vec{u}_{\Delta_m}\right] = (m;\ 0;\ -2)$. Vì thế $d(Oy, \Delta_m) = \dfrac{|m+4|}{\sqrt{m^2+4}} \leq \sqrt{5}$.

Khoảng cách giữa Δ_m và trục Oy lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $m = 1$.