Gọi N là trung điểm của

$$SA \Rightarrow N\left(\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \left(-\frac{7a}{8};-\frac{7a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right)$$

$$\overrightarrow{SN} = \left(-\frac{a}{8};-\frac{a}{8};-\frac{a\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SN}.\overrightarrow{CN} = 0 \Rightarrow CN \perp SA \Rightarrow N \equiv M$$

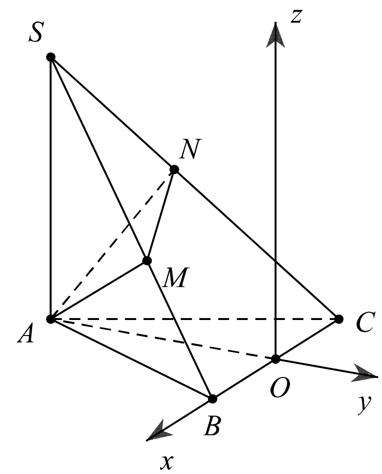
Ta có: $\overrightarrow{SB} = \left(\frac{3a}{4};-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{14}}{4}\right), \overrightarrow{SC} = \left(\frac{3a}{4};\frac{3a}{4};-\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{14}}{4};0;\frac{3a^2}{4}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM} = -\frac{a^3\sqrt{14}}{8}$$

Vậy $V_{S.MBC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}\right| = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

Bài 4

1. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó gốc tọa độ O là trung điểm cạnh BC.



a) Vì $BAO = \frac{1}{2}BAC = 60^0$ nên

$$AO = AB\cos 60^0 = \frac{a}{2}, BO = AB\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Đặt $SA = x, x > 0$, tọa độ các điểm là:

$A(0;-\frac{a}{2};0)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$,

$S\left(0;-\frac{a}{2};x\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SA} = (0;0;-x), \overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}\right] = \left(-\frac{ax}{2};\frac{ax\sqrt{3}}{2};0\right)$

Nên $\overrightarrow{n_1} = (1;-\sqrt{3};0)$ là VTPT của (SAB)

$\overrightarrow{SB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right),\overrightarrow{BC}=\left(-a\sqrt{3};0;0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;ax\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

Nên $\overrightarrow{n_2}=\left(0;2x;a\right)$ là VTPT của (SBC)

Theo đề bài $\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{\left|-2x\sqrt{3}\right|}{2.\sqrt{4x^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $S\left(0;-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$

Vì $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=\frac{1}{2}a.a.\sin 120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên thể tích khối chóp $S.ABC$

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}.$$

Ta có: $\frac{SM}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{1}{9},\ \frac{SN}{SC}=\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{1}{9}$ nên

$$V_{S.AMN}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.V_{S.ABC}=\frac{1}{81}.\frac{a^3\sqrt{6}}{48}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3888}.$$

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

$AI=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OA=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Trong $mp\left(ABC\right)$, ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt $SO=h$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

$O\left(0;0;0\right), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};\ 0;\ 0\right), S\left(0;0;h\right)\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ 0;\ 0\right), B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$

$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};\ 0\right), M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};\ \frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right), N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};-\frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right).$

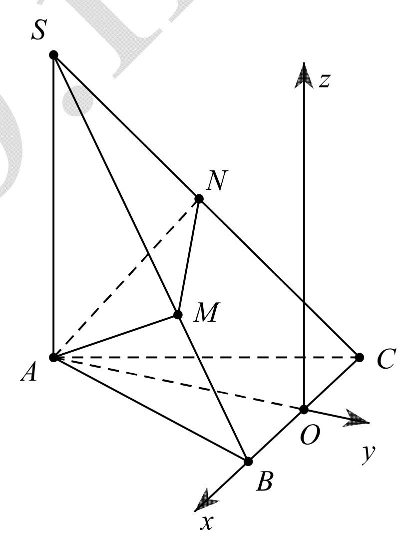
Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]=\left(\dfrac{ah}{4};\ 0;\ \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=\left(6h;0;5a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của (AMN)

$\left[\overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SC}\right]=\left(-ah;\ 0;\ \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=\left(6h;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của (SBC)

Vì $(AMN)\perp(SBC)\Rightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow h^2=\dfrac{5a^2}{12}$

$\Rightarrow S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right\|=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$

3. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ và O là trung điểm BC



$A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right),$

$C\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right),\ S\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};2a\right)$

$\overrightarrow{SB}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-2a\right), \overrightarrow{SC}=\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-2a\right)$

Phương trình $SB:\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}+t\\ y=\sqrt{3}t\\ z=-4t\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2}+t;\sqrt{3}t;-4t\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\left(\dfrac{a}{2}+t;\sqrt{3}t+\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-4t\right)$

Vì

$AM\perp SB\Rightarrow\dfrac{a}{2}+t+3t+\dfrac{3a}{2}+16t=0\Rightarrow t=-\dfrac{a}{10}\Rightarrow M\left(\dfrac{2a}{5};-\dfrac{a\sqrt{3}}{10};\dfrac{2a}{5}\right)$

Tương tự ta tìm được $N\left(-\frac{2a}{5};-\frac{a\sqrt{3}}{10};\frac{2a}{5}\right)$

$\overrightarrow{SA}=(0;0;-2a),\overrightarrow{SM}=\left(\frac{2a}{5};\frac{2a\sqrt{3}}{5};-\frac{8a}{5}\right),\overrightarrow{SN}=\left(-\frac{2a}{5};\frac{2a\sqrt{3}}{5};-\frac{8a}{5}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]=\left(0;\frac{32a^2}{25};\frac{8a^2\sqrt{3}}{25}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}=-\frac{16a^2\sqrt{3}}{25}$

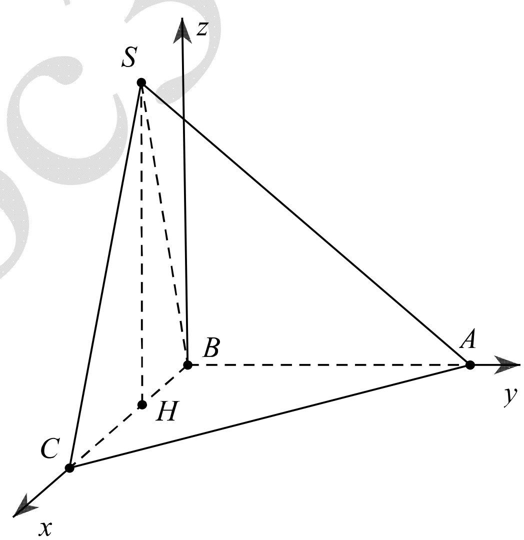
Do đó $V_{S.AMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}\right|=\frac{8a^3\sqrt{3}}{75}$. Mặt khác

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{A.BCNM}=V_{S.ABC}-V_{S.AMN}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

4. Gọi H là hình chiếu của S lên $BC\Rightarrow SH\perp(ABC)$

Đặt $BH=x, SH=y; x,y>0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các đỉnh $B(0;0;0), C(4a;0;0), A(0;3a;0), H(x;0;0), S(x;0;y)$

Suy ra $\overrightarrow{BS}=(x;0;y),\overrightarrow{BC}=(4a;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC}=4ax$

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC}}{SB.BC} = \cos 30^0 \\ SB = 2a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4ax}{2a\sqrt{3}.4a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2 + y^2 = 12a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a \\ y = a\sqrt{3} \end{cases}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$: $V = \dfrac{1}{3}y.\dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{1}{6}.a\sqrt{3}.4a.3a = 2a^3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{SA} = \left(-3a; 3a; -a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{SC} = \left(a; 0; -a\sqrt{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(-3a^2\sqrt{3}; -4a^2\sqrt{3}; -3a^2\right)$

Suy ra $\vec{n} = (3; 4; \sqrt{3})$ là VTPT của (SAC), phương trình (SAC) là:

$$3x + 4y + \sqrt{3}z - 12a = 0$$

Vậy $d\left(B, (SAC)\right) = \dfrac{\left|-12a\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 3}} = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 5 *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Ta có : $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$.

1. Tọa độ điểm H khi H là trực tâm ΔABC hay là hình chiếu của O lên (ABC)

$$\begin{cases} x = \dfrac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ y = \dfrac{bc^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ z = \dfrac{ca^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \end{cases}.$$

2. Phương trình mặt phẳng (ABC) : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

$$d(O,\ (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

3. Gọi $M(x;\ y;\ z)$. Ta có $M \in (ABC) \Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1.$

Ta có $\dfrac{AM^2}{AO^2} = \dfrac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{a^2} = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} - \dfrac{2x}{a} + 1 = \dfrac{OM^2}{OA^2} - \dfrac{2x}{a} + 1.$

Tương tự ta đi đến $\dfrac{AM^2}{AO^2} + \dfrac{BM^2}{BO^2} + \dfrac{CM^2}{CO^2} = OM^2\left(\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}\right) + 1$

$$= \frac{OM^2}{OH^2} + 1 = \frac{MH^2}{OH^2} + 2.$$

4. Dễ chứng minh $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$

Chú ý $\sin\beta \sin\gamma \le \dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\gamma}{2}$ nên

$$\frac{\sin^2\alpha}{1 + \sin\beta\sin\gamma} \ge \frac{2\sin^2\alpha}{2 + \sin^2\beta + \sin^2\gamma} = \frac{2\sin^2\alpha}{4 - \sin^2\alpha}$$

Tương tự ta có vế trái T của bất đẳng thức cần chứng minh thỏa mãn

$$T \ge \frac{2\sin^2\alpha}{4 - \sin^2\alpha} + \frac{2\sin^2\beta}{4 - \sin^2\beta} + \frac{2\sin^2\gamma}{4 - \sin^2\gamma}$$

Hay $T + 6 \ge 8\left(\dfrac{1}{4 - \sin^2\alpha} + \dfrac{1}{4 - \sin^2\beta} + \dfrac{1}{4 - \sin^2\gamma}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x + y + z}$, $\forall x, y, z > 0$ ta được

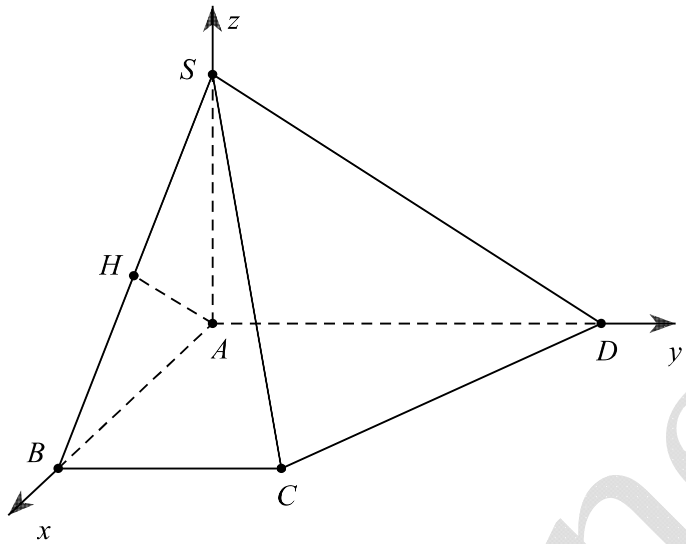
$$T + 6 \ge \frac{72}{12 - (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)} = \frac{36}{5}.$$

Vậy $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 + \sin\beta\sin\gamma} + \dfrac{\sin^2\beta}{1 + \sin\gamma\sin\alpha} + \dfrac{\sin^2\gamma}{1 + \sin\alpha\sin\beta} \ge \dfrac{6}{5}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\alpha = \beta = \gamma = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Bài 6

1. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các đỉnh: $A(0;0;0), S\left(0;0;a\sqrt{2}\right), B\left(a;0;0\right), D\left(0;2a;0\right), C\left(a;a;0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SB}=\left(-a;0;a\sqrt{2}\right)$, phương trình

$$SB:\begin{cases}x=a-t\\ y=0\\ z=\sqrt{2}t\end{cases}\Rightarrow H\left(a-t;0;\sqrt{2}t\right)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(a-t;0;\sqrt{2}t\right)$$

$$AH\perp SB\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB}=0\Leftrightarrow -a+t+2t=0\Rightarrow t=\frac{a}{3}\Rightarrow H\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-a\sqrt{2}\right), \overrightarrow{CD}=\left(a;-a;0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow SC\perp CD\Rightarrow\Delta SCD$ vuông tại C

$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right]=\left(-a^2\sqrt{2};-a^2\sqrt{2};-2a^2\right)\Rightarrow\vec{n}=\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ là VTPT của (SCD)

Phương trình $(SCD): x+y+\sqrt{2}z-2a=0$.

Vậy $d\left(H,(SCD)\right)=\dfrac{\left|\dfrac{2a}{3}+\dfrac{2a}{3}-2a\right|}{\sqrt{1+1+2}}=\dfrac{a}{3}$.