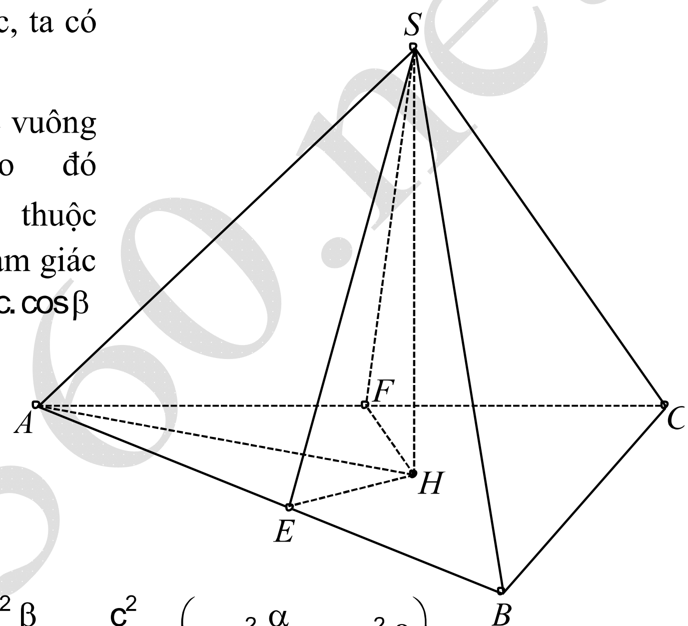
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

$\Rightarrow S_{\Delta CEF} = \dfrac{1}{2}CE.EF.\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{5\sqrt{7}}{14} = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{112}$

Vậy $h = \dfrac{3V_{B.CEF}}{S_{\Delta CEF}} = \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}}{\dfrac{a^2\sqrt{21}}{112}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{3}$.

2. Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy. Hạ $HE \perp AB, HF \perp AC$.

Theo định lý ba đường vuông góc, ta có $SE \perp AB, SF \perp AC$.



Vì $SAB = SAC$ nên hai tam giác vuông SAE, SAF bằng nhau, do đó $SE = SK \Rightarrow HE = HF$, hay H thuộc phân giác trong của góc A của tam giác ABC. Ta có $AE = SA.\cos\beta = c.\cos\beta$ nên trong tam giác vuông AHE ta có

$AH = \dfrac{AE}{\cos HAE} = \dfrac{c.\cos\beta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

Xét tam giác vuông SHA ta có

$SH^2 = SA^2 - AH^2 = c^2 - \dfrac{c^2.\cos^2\beta}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{c^2}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\beta\right)$

$\Rightarrow SH = \dfrac{c}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}$.

Diện tích đáy của khối chóp $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \dfrac{1}{2}ab.\sin\alpha$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{6}.ab.\sin\alpha.\frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}$$

Vậy ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.abc.\sin\dfrac{\alpha}{2}.\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}$.

3. Vì $SM \perp (ABC)$ nên ta có $V_{SBMI} = \frac{1}{3}SM.S_{BMI}, V_{SCNI} = \frac{1}{3}SM.S_{CNI}$ và $V_{SABC} = \frac{1}{3}SM.S_{ABC}$, do đó hệ thức điều kiện $V_{SMBI} + V_{SCNI} = V_{SABC}$ trở thành $S_{MBI} + S_{CNI} = S_{ABC}$. Vì $AM = x$ nên $BM = a - x$, do đó

$$\frac{S_{BMI}}{S_{BAC}} = \frac{BM}{BA}.\frac{BI}{BC} = \frac{a-x}{a}.\frac{1}{2} \Rightarrow S_{BMI} = \frac{a-x}{2a}S_{ABC}$$

Kẻ $CJ // AB$. Mà I là trung điểm của BC nên $CJ = MB = a - x$.

$\frac{NA}{NC} = \frac{AM}{CH} \Leftrightarrow \frac{CA+CN}{CN} = \frac{x}{a-x}$

$\Rightarrow \frac{CA}{CN} = \frac{2x-a}{a-x}$.

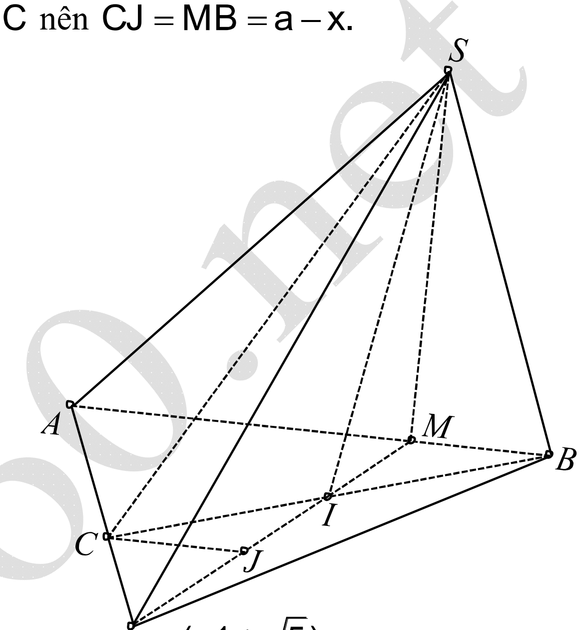
Suy ra $\frac{S_{CNI}}{S_{CAB}} = \frac{CN}{CA}.\frac{CI}{CB} = \frac{a-x}{2x-a}.\frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_{BMI} = \frac{a-x}{2(2x-a)}S_{ABC}$

Do đó điều kiện

$S_{MBI} + S_{CNI} = S_{ABC}$ trở thành

$\frac{a-x}{2a}S_{ABC} + \frac{a-x}{2(2x-a)}S_{ABC} = S_{ABC}$



$\Leftrightarrow \frac{a-x}{2a} + \frac{a-x}{2(2x-a)} = 1 \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(-1\pm\sqrt{5})a}{2}$

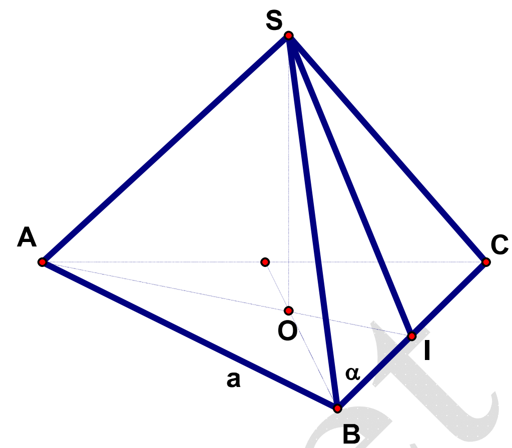
Vì $x > 0$ nên giá trị cần tìm của x là $\frac{(-1+\sqrt{5})a}{2}$.

4. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC), theo tính chất của hình chóp đều thì O là trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có tam giác SAI là thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với mặt phẳng đi qua cạnh bên SA và đường cao SO của hình chóp đã cho.

Vì tam giác SBC cân tại S, I là trung điểm của BC nên tam giác SIB vuông tại I, suy ra

$SI = IB\tan\alpha = \frac{a}{2}\tan\alpha$.



Tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow OI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Trong tam giác vuông SOI.

$$SO^2 = SI^2 - OI^2 = \frac{a^2}{4}\tan^2\alpha - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{12}\left(3\tan^2\alpha - 1\right)$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{3\tan^2\alpha - 1}.$$

Diện tích của thiết diện SAI.

$$S_{SAI} = \frac{1}{2}SO.AI = \frac{1}{2}\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{3\tan^2\alpha - 1}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3\tan^2\alpha - 1}}{8}.$$

Lại có :

$$3\tan^2\alpha - 1 = \left(\sqrt{3}\tan\alpha + 1\right)\left(\sqrt{3}\tan\alpha - 1\right) = \left(\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1\right)\left(\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha\right)\left(\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4\left(\sin\alpha\cos 30^0 + \sin 30^0\cos\alpha\right)\left(\sin\alpha\cos 30^0 - \sin 30^0\cos\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4\sin\left(\alpha + 30^0\right)\sin\left(\alpha - 30^0\right)}{\cos^2\alpha}.$$

$\Rightarrow S_{SAI} = \frac{a^2}{4\cos\alpha}\sqrt{\sin\left(\alpha + 30^0\right)\sin\left(\alpha - 30^0\right)}.$

Bài 10

1. a) Gọi E là trung điểm của BC

$\Rightarrow HE \perp BC$ và $SH \perp BC \Rightarrow (SHE) \perp BC \Rightarrow (SHE) \perp (SBC)$.

Do đó, hạ $IK \perp SE \Rightarrow IK \perp (SBC) \Rightarrow IK = b$.

Hai tam giác ΔSKI và ΔSHE đồng dạng với nhau suy ra

$$\frac{IK}{HE} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SH = \frac{HE.SK}{IK} = \frac{a}{2b}SK = \frac{b}{2a}\sqrt{SI^2 - IK^2} \Rightarrow SH = \frac{2a}{b}\sqrt{\frac{SH^2}{4} - b^2}$$

$$\Leftrightarrow SH^2\left(1 - \frac{a^2}{16b^2}\right) = -\frac{a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}} \text{ và } S_{ABCD} = a^2$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}.a^2 = \frac{2a^3b}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

b) Ta có: $\left((SBC),(ABCD)\right) = SEH = \alpha$.

Đặt $BC = x$ thì ta có $OE = \frac{x}{2}, OB = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHE ta có $SH = HE.\tan\alpha$, trong tam giác vuông SHB có:

$$SH^2 = SB^2 - HB^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\tan\alpha\right)^2 = h^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{2h}{\sqrt{2 + \tan^2\alpha}}.$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}x^2.\frac{x}{2}\tan\alpha = \frac{1}{3}.\frac{4h^2}{2 + \tan^2\alpha}.\frac{h\tan\alpha}{\sqrt{2 + \tan^2\alpha}}$$

$$= \frac{4h^3\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2 + \tan^2\alpha\right)^3}}$$

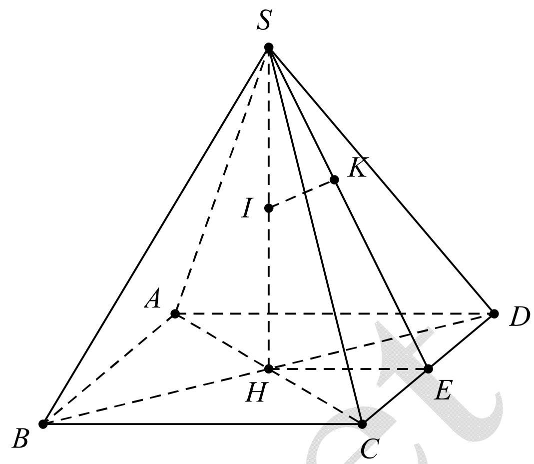
$\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}=\sqrt{\left(1+1+\tan^2\alpha\right)^3}$

$\geq\sqrt{\left(3\sqrt[3]{\tan^2\alpha}\right)^3}=3\sqrt{3}\tan\alpha$

$V_{S.ABCD}\leq\dfrac{4\sqrt{3}h^3\tan\alpha}{27\tan\alpha}=\dfrac{4\sqrt{3}h^3}{27}$.

Vậy $\max V_{S.ABCD}=\dfrac{4\sqrt{3}h^3}{27}$

$\Leftrightarrow\tan\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=45^0$



Bài 11

1. Gọi O là tâm của đáy, ta có $BD\perp(SOA)$ suy ra góc SOA là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt đáy nên $SOA=60^0$.

Trong tam vuông SAO ta có: $SA=AO.\tan 60^0$

$=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

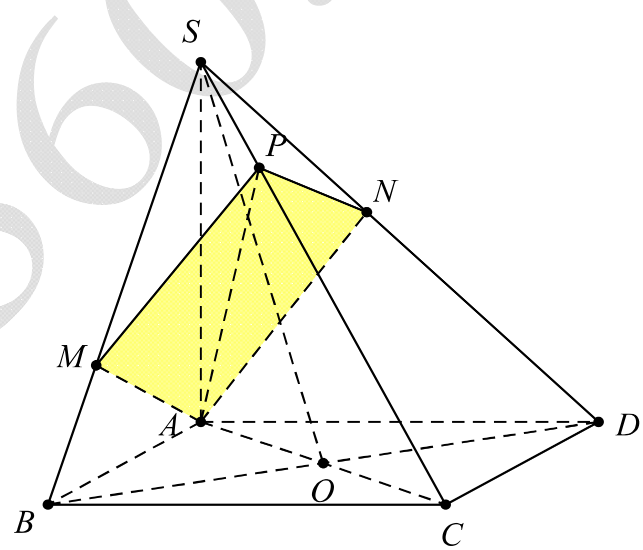
Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow BC\perp AM$

$\Rightarrow AM\perp(SBC)$

$\Rightarrow AM\perp SC$



Tương tự: $AN\perp(SCD)\Rightarrow AN\perp SC$, từ đó suy ra: $SC\perp(AMN)$

Nên AP là đường cao của hình chóp $S.AMPN$

Suy ra: $V_{S.AMPN}=\dfrac{1}{3}AP.S_{AMPN}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{SP}{SC}=\frac{SP.SC}{SC^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AC^2}=\frac{3}{7}\Rightarrow SP=\frac{3}{7}SC=\frac{3a\sqrt{14}}{14}$$

Trong tam giác vuông SAB ta có: $AM = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Do $\Delta SBC \sim \Delta SPM \Rightarrow \dfrac{MP}{BC} = \dfrac{SP}{SB} \Rightarrow MP = \dfrac{SP.BC}{SB} = \dfrac{3a\sqrt{35}}{35}$

Suy ra: $S_{AMPN} = 2S_{\Delta AMP} = AM.MP = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{35}$.

Vậy $V_{S.AMPN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a\sqrt{14}}{14}.\dfrac{a^2\sqrt{21}}{35} = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{70}$.

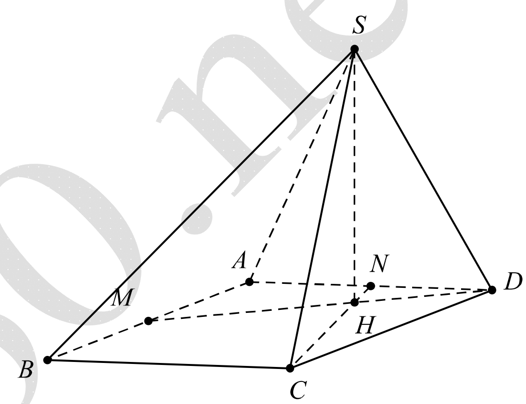
2.

Ta có: $V_{S.CDNM} = \dfrac{1}{3}SH.S_{MNDC}$

$S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta MBC}$

$= a^2 - \dfrac{a^2}{8} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{8}$.

$V_{S.CDNM} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{5a^2}{8} = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{24}$



Lại thấy: $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right).\dfrac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\right) = DA^2 - DC^2 = 0$.

Vậy $CN \perp DM$ từ đó $SC \perp DM$ bởi vậy :

$d(SC; DM) = d(H; SC) = \dfrac{2S_{\Delta HSC}}{SC} = \dfrac{SH.CH}{SC} = \dfrac{SH.CH}{\sqrt{SH^2 + CH^2}}$.

Lại có: $CH = \dfrac{2S_{\Delta CMD}}{DM} = \dfrac{2\left(S_{ABCD} - S_{\Delta AMD} - S_{\Delta CMB}\right)}{DM} = a\sqrt{\dfrac{4}{5}}$

Thay lên trên ta có khoảng cách cần tính là: $2a\sqrt{\dfrac{3}{19}}$.

3. Chứng minh M là trung điểm SA

Ta có: $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$, $HC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

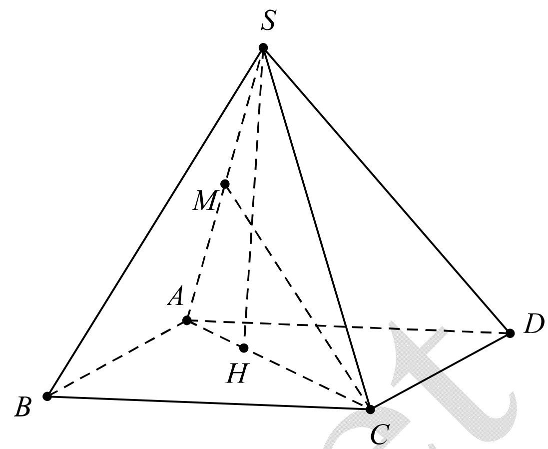
$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SC = AC \Rightarrow \Delta ACS$ cân tại C nên M là trung điểm SA.

- Tính $V_{S.MBC}$?

Vì M là trung điểm SC nên

$S_{SCM} = \frac{1}{2}S_{SAC}$, suy ra



$V_{SMBC} = \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{1}{6}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$

4. Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

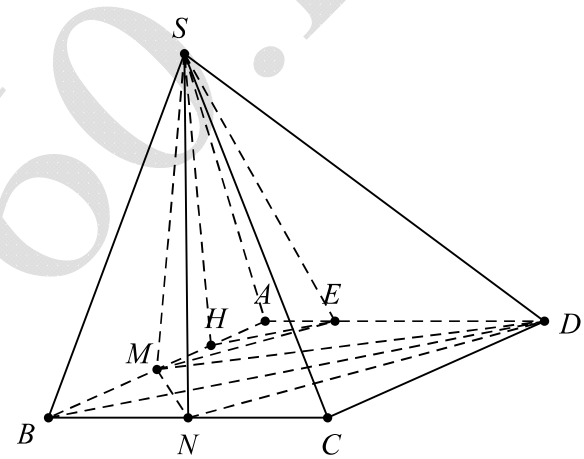
Do đó SH là đường cao của hình chóp $S.BMDN$.

$SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S

$\Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$.

Do đó tam giác đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Diện tích tứ giác $BMDN$ là: $S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích khối chóp $S.BMDN$: $V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Kẻ $ME // DN$ $(E \in AD) \Rightarrow AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $(SM, ME) = \varphi$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có: $SA \perp AE$

$\Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do ΔSME cân tại E nên $SME = \varphi$ và $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

5. Gọi H là trung điểm của AD. Ta có tam giác SAD đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP$ (1)

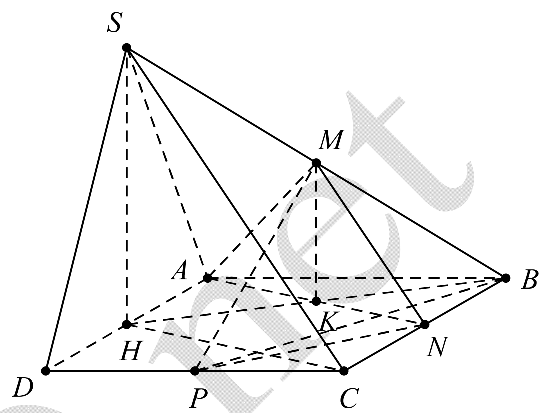
Ta có $ABCD$ là hình vuông nên:

$\Delta CDH = \Delta BCP$

$\Rightarrow BP \perp CH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $BP \perp (SHC)$

Mặt khác: $MN // SC; AN // HC$



$\Rightarrow (AMN) // (SHC) \Rightarrow BP \perp AM$

Gọi $K = BH \cap AN$. Ta có MK là đường trung bình của tam giác SBH

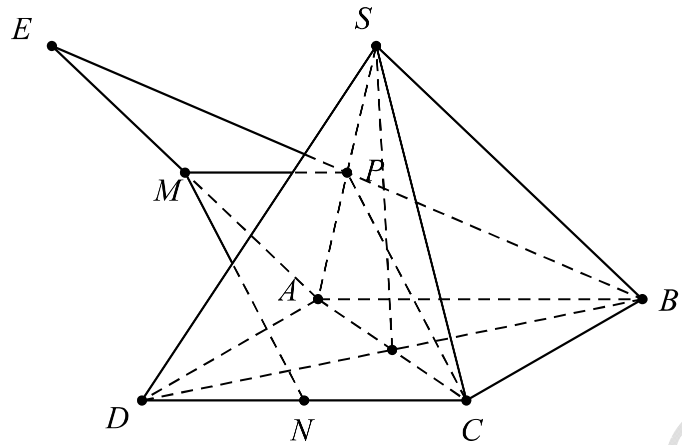
Suy ra $MK // SH \Rightarrow MK \perp (CMN); MK = \dfrac{1}{2}SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

Diện tích tam giác CMN : $S_{CMN} = \dfrac{1}{2}CM.CN = \dfrac{a^2}{8}$.

Thể tích khối tứ diện $CMNP$: $V_{CMNP} = \dfrac{1}{3}.MK.S_{CMN} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (đvtt).

6. Gọi P là trung điểm của SA. Ta có MP là đường trung bình của tam giác $EAD \Rightarrow MP // AD \Rightarrow MP // NC$ và $MN = \dfrac{1}{2}AD = NC$.

Suy ra $MNCP$ là hình bình hành $\Rightarrow MN // CP \Rightarrow MN // (SAC)$.



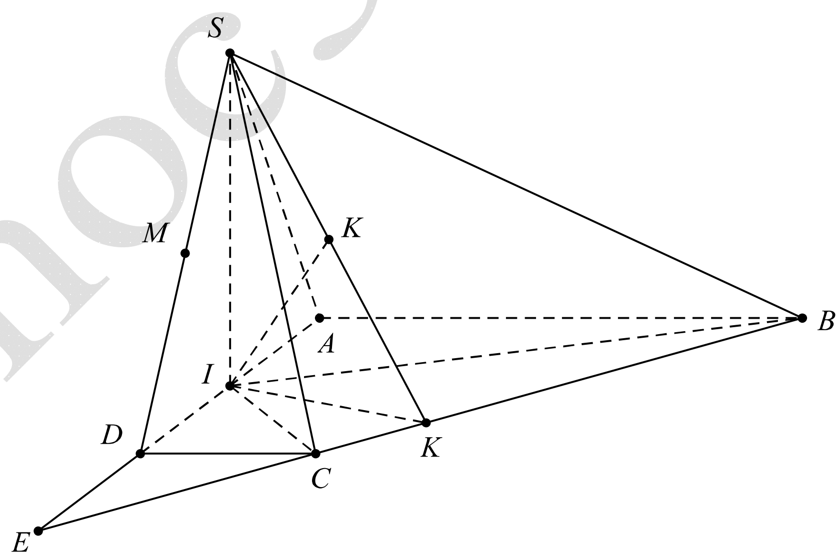
Ta dễ chứng minh được $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp MN$
Vì $MN // (SAC)$ nên:

$$d(MN, AC) = d(N,(SAC)) = \frac{1}{2}d(B,(SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{\sqrt{2}a}{4}.$$

Vậy $d(MN, AC) = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.

Bài 12

1. a. Tính $V_{S.ABCD}$



Từ giả thiết suy ra $SI \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD}$

Ta có: $S_{ABCD} = \dfrac{(AB+DC)AD}{2} = 2a^2$

Vẽ $IK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow SKI$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt đáy

Nên $SKI = 60^0$

Vì $S_{\Delta IDC} = \dfrac{1}{2}DI.DC = \dfrac{a^2}{4}$, $S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2}AI.BI = \dfrac{3a^2}{4}$,

suy ra $S_{\Delta BIC} = S_{ABCD} - (S_{\Delta ICD} + S_{\Delta IAB}) = a^2$

Mặt khác: $BC = \sqrt{(AB-CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$ và $S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2}IK.BC$

Nên suy ra: $IK = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác vuông SIK ta có: $SI = IK\tan 60^0 = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}.2a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$.

b) Gọi M là trung điểm SD. Tính $d(M,(SBC))$.

Gọi E là giao điểm của AD với BC, ta có:

$\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{DC}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow ED = \dfrac{1}{2}AD = ID$

Do đó: $d(M,(SBC)) = \dfrac{1}{2}d(D,(SBC)) = \dfrac{1}{4}d(I,(SBC))$

Gọi H là hình chiếu của I lên SK ta có: $d(I,(SBC)) = IH$

Trong tam giác vuông SIK, ta có:

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{5}{12a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Vậy $d(M,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

2. Vì hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt