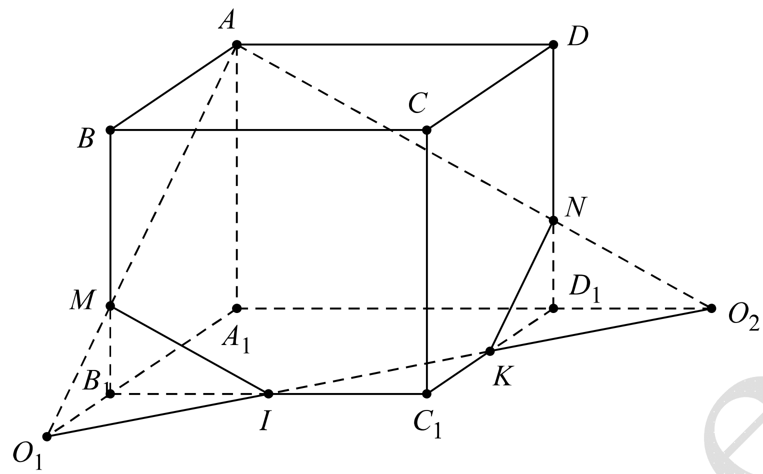


Do $MB_1 = ND_1 = \frac{a}{3}$ nên ta tính được $O_1B_1 = B_1I = KD_1 = D_1O_2 = \frac{a}{2}$

Do đó $V_{AA_1O_1O_2} = \frac{1}{3}AA_1\left(\frac{1}{2}A_1O_1.A_1O_2\right) = \frac{3a^3}{8}$,

$V_{MB_1O_1I} = V_{ND_1KO_2} = \frac{1}{3}.\frac{a}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{72}$.

Đặt $V_1 = V_{A_1B_1AMIKN}$

$\Rightarrow V_1 = V_{AA_1O_1O_2} - \left[V_{MB_1O_1I} + V_{ND_1KO_2}\right] = \frac{3a^3}{8} - 2.\frac{a^3}{72} = \frac{25a^3}{72}$.

$V_2 = V_{C_1BCDAMIKN} = a^3 - V_1 = \frac{47a^3}{72}$ và $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}$.

2. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{x}, \overrightarrow{AB} = \vec{y}, \overrightarrow{AD} = \vec{z}$.

Ta có tam giác ABD là tam giác đều

$\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = 0,\ \vec{y}.\vec{z} = |\vec{y}||\vec{z}|.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}.$

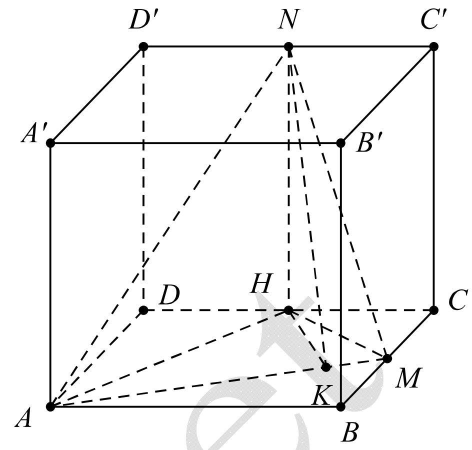
$\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}.$

M, N là trung điểm của $BC, C'D'$ nên

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N}$

$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'D'} = \dfrac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \dfrac{1}{2}\vec{y}.$

$MN \perp B'D$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB'} = \vec{0}$



Do đó

$$(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z})\left(\frac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}.a^2 - \frac{1}{2}.a^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Ta có: $d(D,(AMN)) = \dfrac{3V_{D.AMN}}{S_{AMN}}$. Dễ thấy

$$S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Gọi H là trung điểm của DC thì $NH \perp (ABCD), NH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ nên

$$V_{D.AMN} = V_{N.AMD} = \frac{1}{3}NH.S_{AMD} = \frac{\sqrt{6}}{24}a^3.$$

Kẻ $HK \perp AM$ ta có $NK \perp AM$. Theo định lí hàm số cosin

$$AM^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos 120^0 = \frac{7}{4}a^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

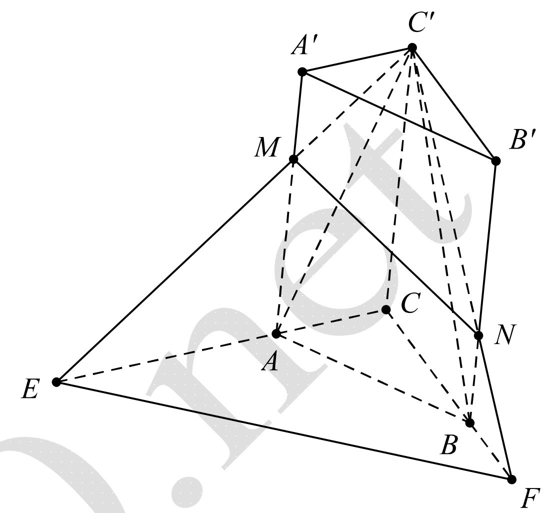
Ta có $S_{AHM} = S_{ABCD} - (S_{ADH} + S_{CHM} + S_{ABM}) = \dfrac{3}{8}S_{ABCD} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}a^2$

Nên $HK = \dfrac{2S_{AHM}}{AM} = \dfrac{3\sqrt{21}}{28}a \Rightarrow NK = \sqrt{NH^2 + HK^2} = \dfrac{\sqrt{231}}{14}a.$

Suy ra $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}NK.AM = \dfrac{\sqrt{33}}{8}a^2$, do đó $d(D,(AMN)) = \dfrac{\sqrt{22}}{11}a.$

Vậy khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (AMN) là $\frac{\sqrt{22}}{11}a$.

3. Ta có $V_{ABC.A'B'C'}=a^3$.



a) Do $V_{C'.ABC}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$,

$V_{C'ABB'A'}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2a^3}{3}$

Mặt khác $S_{ABNM}=S_{A'B'NM}$

$\Rightarrow V_{C'A'B'NM}=\frac{1}{2}V_{C'ABB'A'}=\frac{a^3}{3}$

Suy ra $V_{C'CABNM}=\frac{2a^3}{3}$.

Vậy $\frac{V_{C'A'B'NM}}{V_{C'CABNM}}=\frac{1}{2}$.

b) Ta có: $\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}}=\frac{\frac{1}{2}CE.CF.\sin ECF}{\frac{1}{2}CA.CB.\sin ACB}=\frac{CE.CF}{CA.CB}$

Mà $\frac{EA}{EC}=\frac{MA}{CC'}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{CE}{CA}=3$, $\frac{BF}{BC}=\frac{BN}{CC'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{CF}{CB}=\frac{3}{2}$.

Do đó $\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}}=\frac{9}{2}$

Suy ra $C_{C'CEF}=\frac{9}{2}V_{C'CAB}=\frac{3a^3}{2}$.

4. Đường thẳng NP cắt $B'B$ tại E, cắt $B'C'$ tại K, $ME\cap AB=F$, $MK\cap A'C'=H$. Thiết diện là ngũ giác $MHPNF$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Gọi V, V_1,V_2 lần lượt là thể tích khối lăng trụ, khối đa diện chứa đỉnh A, khối đa diện chứa đỉnh B (chia bởi mặt phẳng (MNP)). Vì $NP//BC', NP=\frac{1}{2}BC'$ nên $EB=CP=\frac{1}{2}BB'$ suy ra

$\frac{FB}{MB'}=\frac{EB}{EB'}=\frac{EF}{EM}=\frac{1}{3}$ và $C'K=CN=\frac{1}{2}B'C'\Rightarrow\frac{KP}{KE}=\frac{KC'}{KB'}=\frac{1}{3}$.

Trong tam giác $A'B'C'$ ta dễ dàng tính được $\dfrac{KH}{KM} = \dfrac{1}{2}$.

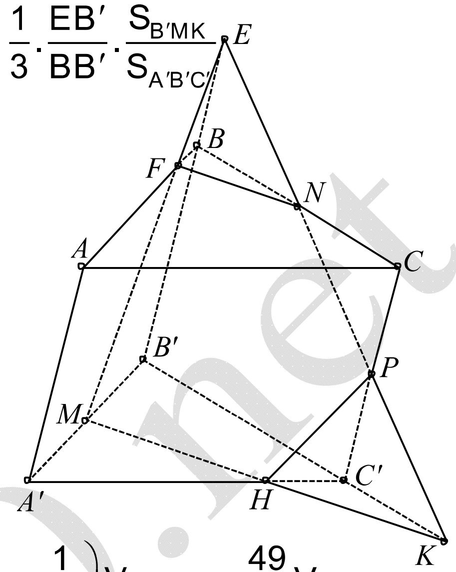
Ta có: $\dfrac{V_{E.B'MK}}{V} = \dfrac{\frac{1}{3}d(E,(A'B'C')).S_{B'MK}}{d(B,(A'B'C')).S_{A'B'C'}} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{EB'}{BB'}.\dfrac{S_{B'MK}}{S_{A'B'C'}}$

hay $\dfrac{V_{E.B'MK}}{V} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}.\dfrac{1.3}{2.2} = \dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow V_{E.B'MK} = \dfrac{3}{8}V$

Mà $\dfrac{V_{E.BFN}}{V_{E.B'MK}} = \dfrac{EB}{EB'}.\dfrac{EF}{EM}.\dfrac{EN}{EK} = \dfrac{1}{27}$,

$\dfrac{V_{K.C'PH}}{V_{K.B'EM}} = \dfrac{KC'}{KB'}.\dfrac{KP}{KE}.\dfrac{KH}{KM} = \dfrac{1}{18}$.



$\Rightarrow V_1 = V_{E.B'MK} - V_{E.BFN} - V_{K.C'PH} = \left(1 - \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{18}\right)V_{E.B'MK} = \dfrac{49}{54}V_{E.B'MK}$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{49}{54}V_{E.B'MK} = \dfrac{49}{54}.\dfrac{3}{8}V = \dfrac{49}{144}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{49}{95}$.

Vậy tỉ số thể tích hai phần được chia bởi mặt phẳng (MNP) là $\dfrac{49}{95}$.

Bài 12

1. a) Xét hình thang $ABCD$ có BD là phân giác trong góc ADC nên tam giác ABD cân tại A. Do đó $AB = AD = BC = 3cm$. Mặt khác $BD \perp BC$ nên đặt $BDC = \alpha$ thì: $BCD = ADC = 2\alpha$, suy ra $2\alpha + \alpha = 90^0 \Rightarrow \alpha = 30^0$. Vì thế $DC = 2BC = 6cm$.