hai đường thẳng AB và CD. Tìm tọa độ M trên CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

4. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;4;9)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho

a) Thể tích khối tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất.

b) $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-8}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và các điểm $A(-3;4;1)$, $B(1;6;-1)$, $C(1;10;3)$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

a) $MA+MB$ nhỏ nhất.

b) $MA+MC$ nhỏ nhất.

Bài 2

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $(a>0, b>0)$. Gọi M là trung điểm của CC'.

a) Tính thể tích của khối tứ diện $BDA'M$.

b) Cho $a+b=4$. Tìm $\max V_{A'BDM}$.

2. Cho các điểm $A(3;-1;0), B(2;1;-1), C(3;2;6)$.

a) Tìm điểm D thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $ABCD$ là tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc.

b) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất.

3. Cho hai điểm $A(5;2;3), B(-1;-2;-1)$.

a) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại M. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số nào?

b) Tìm tọa độ điểm N trên mặt phẳng (Oxz) sao cho $NA+NB$ có giá trị nhỏ nhất.

c) Cho điểm K có các thành phần tọa độ bằng nhau. Xác định K biết rằng $2KA^2-3KB^2$ đạt giá trị lớn nhất

4. Cho $A(1;-1;2)$, mặt phẳng (P): $x+y+z-1=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A đồng thời

a) $d//(P)$ và khoảng cách giữa d và Δ là lớn nhất.

b) $d//(P)$ và góc giữa d và Δ là lớn nhất, bé nhất.

c) d vuông góc với đường thẳng $d': \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $(t \in R)$ và khoảng cách từ điểm $B(-1;\ 1;\ -1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, bé nhất.

Bài 3 Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và ba điểm $A(3;2;-1)$, $B(1;-2;1)$, $C(2;1;3)$. Tìm $M \in \Delta$ sao cho:

1. $MA + MB$ nhỏ nhất **2**. $MA + MC$ nhỏ nhất.

Bài 4 Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(1;4;9)$ sao cho (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C thỏa:

1. M là trọng tâm tam giác ABC;

2. Tứ diện $OABC$ có thể tích lớn nhất;

3. Khoảng cách từ O đến (ABC) lớn nhất;

4. $OA + OC = 4OB$ và $OA = OB + 9$.

Bài 5 Cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

1. Tìm tâm và bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính R.

2. Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} < r \leq \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Bài 6 Cho các điểm $A(1;\ 0;-1), B(2;\ -2;\ 1), C(0;\ -1;\ 0)$.

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 6 = 0$ sao cho $:\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{57}{2}$ sao cho : $\left|2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 7

1. Cho mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0$ và mặt cầu $(S_2):\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường nối tâm của hai mặt cầu (S_1) và (S_2), tiếp xúc với hai mặt cầu đó và có bán kính lớn nhất

2. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm điểm $A(3;-2;1)$ và cắt đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ sao cho

a) Khoảng cách từ $B(2;1;-1)$ đến Δ là lớn nhất, bé nhất.

b) Khoảng cách giữa Δ và $\Delta': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \quad (t \in R) \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ lớn nhất.

c) Góc giữa Δ và mặt phẳng $(P): 5x + 2y - 3z + 8 = 0$ lớn nhất.

Bài 8. Cho $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và $d': \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$, $(Q):\ x + 2y + 2z - 3 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và

1. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) nhỏ nhất.

2. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' lớn nhất.

Bài 9 Trong không gian cho hai điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$ và đường thẳng: $d: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

2. Viết phương trình (Q) chứa d vào tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất.

3. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa d và tạo với Oy một góc lớn nhất.

Bài 10

Cho các điểm $A(1;-1;2)$, $B(-2;1;0)$, $C(2;0;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y - z + 3 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất

2. $|MA - MC|$ có giá trị lớn nhất.

3. $MA + MC$ có giá trị nhỏ nhất

4. $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất.

Bài 11.

1. Cho $O(0;\ 0;\ 0)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$, đường thẳng $d': \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$. Lập phương trình đường thẳng d qua O, vuông góc với Δ và cách d' khoảng lớn nhất.

2. Cho các điểm $A(4;\ 1;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 2)$, $C(1;\ 1;\ 5)$ và đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 12. Cho các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz (khác gốc tọa độ). Lập phương trình mặt phẳng (ABC) biết

1. Điểm $G(-2;3;1)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

2. Điểm $H(5;-3;-2)$ là trực tâm của tam giác ABC.

3. Mặt phẳng (ABC) qua $M(1;-2;3)$ và $d(O,(ABC))$ lớn nhất.

4. Mặt phẳng (ABC) qua $N(1;2;3)$ và $OA = OB = OC$.

5. Mặt phẳng (ABC) qua $P(3;2;1)$, điểm A có hoành độ bằng -2 đồng thời $OB = 1 + 2OC$.

Bài 13. Cho mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$ và ba điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$.

1. Tìm tọa độ điểm M có tung độ bằng 1, nằm trong mặt phẳng (P) và thỏa mãn $MA = MB$.

2. Tìm điểm N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14.

1. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$ và các điểm $A(1;\ 0;0)$, $B(0;\ 2;\ -3)$. Lập phương trình đường thẳng d nằm trong (P), đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất?.

2. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(Q): 2x-y-z+3=0$, đồng thời d tạo với đường thẳng $d': \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc nhỏ nhất, lớn nhất?.

3. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(-1;0;-1)$ và cắt đường thẳng $d': \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$ sao cho góc giữa đường thẳng d và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ là lớn nhất, nhỏ nhất?

Bài 15. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ và điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và

1. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

2. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (xOy) là nhỏ nhất.

3. Góc giữa mặt phẳng (P) và trục Oy là lớn nhất.

Chú ý: Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$.

1. Tìm M sao cho $P=\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+...+\alpha_n MA_n^2$

a) Nhỏ nhất khi $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$

b) Lớn nhất khi $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<0$

2. Tìm M sao cho $P=\left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất , trong đó $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$.

Phương pháp giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ điểm I tồn tại và duy nhất nếu $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$. Khi đó :

1. $P=\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2+\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)^2+...+\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)^2$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)IM^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 IA_i^2$$

Do $\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 IA_i^2$ không đổi nên:

- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n > 0$ thì P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất
- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n < 0$ thì P lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

2. $P = \left|\alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right) + \alpha_2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}\right) + ... + \alpha_n\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right|.MI$

Do đó P nhỏ nhất hoặc lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

- Nếu M thuộc đường thẳng Δ (hoặc mặt phẳng (P)) thì MI lớn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ (hoặc (P)).

- Nếu M thuộc mặt cầu (S) và đường thẳng đi qua I và tâm của (S), cắt (S) tại hai điểm A, B ($IA > IB$) thì MI nhỏ nhất (lớn nhất) $\Leftrightarrow M \equiv B$ ($M \equiv A$).

Ví dụ 10.8 Cho $(P): x - y + z + 1 = 0$ và ba điểm $A(1;1;1), B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$.

1. Tìm tọa độ điểm $M \in (P)$ sao cho $MA = MB$ và $y_M = 1$;

2. Tìm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Gọi $M(x;1;z) \in (P)$, ta có: $x - 1 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -z$

Suy ra

$MA = MB \Leftrightarrow (x-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow -2x - 2z + 2 = -4z + 4$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}$. Vậy $M(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2})$.

2. Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (*)

Ta có:

$2\overrightarrow{IA} = (2-2x; 2-2y; 2-2z)$, $\overrightarrow{IB} = (-x; 1-y; 2-z)$, $\overrightarrow{IC} = (-2-x; -y; 1-z)$